FYSIKTÄVLINGEN
LÖSNINGSFÖRSLAG

KVALIFICERINGS- OCH LAGTÄVLING
8 februari 1996

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

1. Kalla första avsatsens höjd över marken för h_1, den andra avsatsens höjd för h_2, Janes fart före stöten med Tarzan för v, deras gemensamma fart efter stöten för v', Janes och Tarzans massor får M och m respektive. Energilagen för ner- och uppfärd samt rörelsemängdens bevarande i den inelastiska stöten ger

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 = Mgh_1$$

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh_2$$

$$Mv = (M+m)v'$$

Detta ger $M = \dfrac{m}{\sqrt{\dfrac{h_1}{h_2}}-1} \approx 85 \text{ kg}$

Jane väger cirka 85 kg.

2. Man kan göra en tröghetsvåg genom att fästa astronauten vid en lätt platta som är fastgjord i rymdskeppet med en fjäder med känd fjäderkonstant k. Om vi antar att rymdskeppet är mycket tyngre än astronauten vilket verkar rimligt kommer, om astronauten och plattan sätts i svängning, svängningstiden att ges av $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ där m är astronautens massa. Genom att mäta T kan alltså m beräknas. Man kan även tänka sig andra arrangemang: Astronauten kan kasta iväg ett föremål med känd massa och man kan mäta astronautens rekylfart.

3. a) Sätter vi samman ekvationerna får vi $\Delta T = \dfrac{aA}{mc}\left(T - T_0\right)\Delta t$

Ur problemtexten får vi $\Delta T = (73,7 - 66,2)\text{ K} = 7,5\text{ K}$ och

$m = 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,1\text{ m}^3 \cdot 8,96 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3 = 8,96 \cdot 10^{-2}\text{ kg}$

Som värde på T i ekvationen väljer vi medeltemperaturen under avsvalningen, 70,0 ˚C.

Detta ger oss $aA = \dfrac{mc\Delta T}{\left(T - T_0\right)\Delta t} = \dfrac{8,96 \cdot 10^{-2}\text{ kg} \cdot 385\text{ J/kg} \cdot 7,5\text{ K}}{(70,0 - 21,0)\text{ K} \cdot 100\text{ s}} \approx 5,28 \cdot 10^{-2}\text{ J/s}$

(Eftersom arean är densamma i de två fallen bestämmer vi bara produkten aA.)

Anta att temperaturen för aluminiumstaven sjunker med ΔT. Som innan tar vi T som medeltemperaturen under avsvalningen dvs $T = T_{start} - \frac{\Delta T}{2}$. Detta ger oss

$$\Delta T = \frac{aA}{mc}\left(T_{start} - \frac{\Delta T}{2} - T_0\right)\Delta t$$

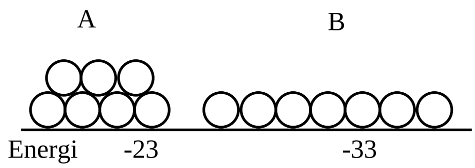
eller

$$\Delta T = \frac{aA\left(T_{start} - T_0\right)}{mc + \frac{aA\Delta t}{2}} = \frac{5,28\cdot 10^{-2}(73,7-21,0)\cdot 100}{10^{-5}\cdot 2,7\cdot 10^{3}\cdot 903 + 5,28\cdot 10^{-2}\cdot 100/2}\ \text{K} \approx 10,3\ \text{K}$$

Aluminiumstavens sluttemperatur blir alltså 63,4 ˚C.

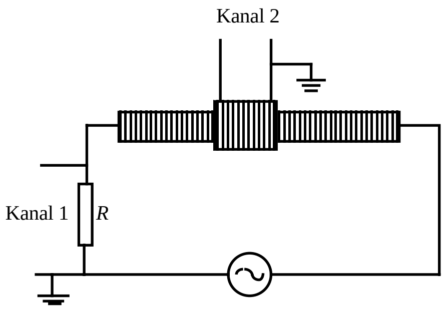
b) För att få stor avsvalning skall tydligen produkten $m\cdot c$ vara liten. För aluminium är denna produkt $2,7\cdot 10^3\cdot 903$ J/K = 2,43 MJ/K. Vi kan till exempel välja bly där denna produkt är $11,35\cdot 10^3\cdot 130$ J/K = 1,48 MJ/K.

4. Partiklarna arrangerar sig på ett sådant sätt att energin blir minimal. Genom att till exempel börja med alla partiklarna i en rad på linjen (bordet) och sedan flytta upp en i taget kan man lätt finna energiminimum. Lösningarna blir:



Jämför med en droppe kvicksilver och en droppe alkohol på ett bord.

5.

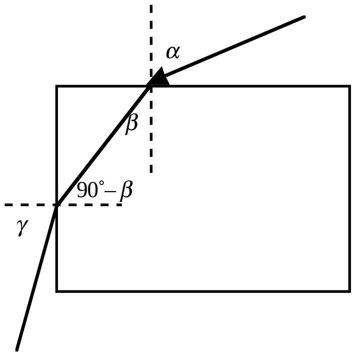


Figuren visar en lämplig koppling.

Anta att den långa spolen har n_1 varv, den korta n_2 varv. Anta att växelströmmen $i = \hat{i}\cos\omega t$ går genom resistorn och den långa spolen. $\omega = 2\pi f$ där f är växelspänningens frekvens.

Spänningen över resistorn som visas på kanal 1 på oscilloskopet blir då $u_1 = R\hat{i}\cos\omega t$ dvs har ett toppvärde $\hat{u}_1 = R\hat{i}$. Magnetfältet i den långa spolen ges av $B = \mu_0 \frac{i\cdot n_1}{l} = \mu_0 \frac{\hat{i}\cos\omega t\cdot n_1}{l}$ där l är spolens längd. Flödet genom den korta spolen blir då $\Phi = B\cdot A = B\cdot \pi r^2$ där A är den långa spolens tvärsnittsarea och r dess radie. Den inducerade spänningen över den korta spolen blir $u_2 = -n_2\frac{d\Phi}{dt} = -n_2\cdot\pi r^2\cdot\frac{dB}{dt} = n_2\cdot\pi r^2\cdot\mu_0\frac{n_1\hat{i}\omega\sin\omega t}{l}$ dvs dess toppvärde är $\hat{u}_2 = n_2\cdot\pi r^2\cdot\mu_0\frac{n_1\hat{i}\omega}{l} = n_2\cdot\pi r^2\cdot\mu_0\frac{n_1\hat{u}_1\omega}{lR}$ som visas på kanal 2. Ur detta kan μ_0 lösas uttryckt i lätt mätbara storheter, $\mu_0 = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}\frac{l\cdot R}{n_1 n_2\cdot\pi r^2\cdot 2\pi f}$

6. Vi undersöker under vilka omständigheter A kan se B.



Ur figuren får genom brytningslagen
$\sin\alpha = n\sin\beta$

$n\sin(90^\circ - \beta) = n\cos\beta = \sin\gamma$

Om vi inte skall få totalreflexion när strålen går ut genom hörnet har vi $\sin\gamma \le 1$. Detta ger

$n\sin\beta = \sin\alpha$

$n\cos\beta \le 1$

Kvadrera och addera dessa samband vilket medför $n^2 \le 1 + \sin^2\alpha \le 2$
Brytningsindex måste alltså vara mindre $\sqrt{2}$ än för att A skall kunna se B dvs är i den aktuella situationen större än $\sqrt{2}$.

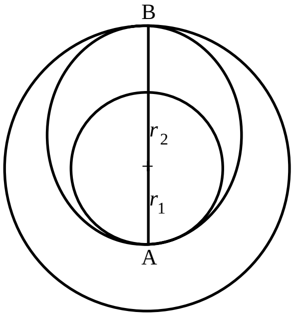
7. Vi antar att grafitstiftet i blyertspennan har en diameter av cirka 1 mm. När man ritar en linje lossnar lager efter lager i stiftet och fastnar på pappret. Streckets tjocklek måste vara minst ett atomlager, detta är en kraftig underskattning men ger oss en övre gräns på streckets längd.

Typiska atomavstånd i fasta ämnen är några hundratal pikometer, detta kan även uppskattas genom att använda data för grafit från tabell. Grafit har en densitet på ungefär 2200 kg/m^3. Molmassan är 0,012 kg. En mol grafit har då en volym av $5{,}5\cdot 10^{-6}$ m^3 och innehåller $6\cdot 10^{23}$ kolatomer. Om vi tänker oss atomerna lagrade i ett kubiskt gitter (vilket inte är riktigt sant men det ger rätt storleksordning på resultatet) har vi $8{,}4\cdot 10^{7}$ atomer på en kubkantlängd av $1{,}8\cdot 10^{-2}$ m. Detta ger ett atomavstånd på 200 pm.

Pennans längd är av storleksordningen 0,1 m. Detta innebär att stiftet innehåller 10^9 atomlager. Varje lager räcker att skriva ett 1 mm långt streck dvs totalt 10^6 m. Detta är säkert en kraftig överskattning, troligtvis behövs 100 – 1 000 atomlager för att strecket skall bli synligt. Ekvatorns längd är $4\cdot 10^{7}$ m alltså kan vi säkert säga att pennan inte räcker.

Man kan också notera att för ett normallångt ord åtgår cirka 0,1 meter blyerts. En sida innehåller av storleksordningen några hundra ord dvs använder några tiotal meter blyerts. En penna räcker säkert att skriva 100 sidor, antagligen 1000 sidor, knappast 10 000 sidor. Detta ger oss en uppskattad strecklängd på några tiotal kilometer, maximalt säg 100 km, vilket även detta är för kort för ekvatorn. Uppskattningen stämmer väl med den tidigare med antagandet om cirka 100 atomlager i strecket.

8. Idén är att först omvandla den cirkulära banan till en elliptisk bana som tangerar de två cirkulära banorna.



Detta gör vi genom att öka satellitens fart i banan med en lämplig raketknuff i hastighetens riktning (dvs raketens utblåsning riktas i motsatt riktning) i punkt A. Detta ändrar farten men ej hastighetens riktning. Banan blir elliptisk. När satelliten efter ett halvt varv i den elliptiska banan kommer till punkt B ökar vi igen satellitens fart med en ny raketknuff i hastighetens riktning så att den får rätt hastighet för att röra sig i en cirkulär bana.

Vi kan även göra en kvantitativ räkning. Enklast blir det om vi tar ett specifikt exempel där vi stoppar in siffror. Anta att radien r_1 i den inre cirkelbanan är 1 i någon lämplig enhet. Anta att radien r_2 på den yttre cirkelbanan i samma enheter är 2. Respektive ”storaxlar” blir då 2 och 4. Storaxeln i ellipsen blir då 3. Perioderna i banorna blir proportionella mot storaxlarna i potens 3/2. Perioden i den inre cirkelbanan blir då $T_1 = 2^{3/2} \approx 2,83$ om vi mäter tiden i någon lämplig tidsenhet. På samma sätt beräknar vi perioden i den yttre cirkeln till $T_1 = 4^{3/2} \approx 8$. Perioden i ellipsen blir $T_1 = 3^{3/2} \approx 5,20$. Arean på den inre cirkeln blir $A_1 = \pi r_1^2 \approx 3,14$. Den yttre cirkelns area är på samma sätt $A_2 = \pi r_2^2 \approx 12,56$.

Vi beräknar nu ellipsens area. Vi har a = 3/2 = 1,5. Man ser lätt att avståndet mellan brännpunkterna är $2c = r_2 - r_1$ dvs $c = \frac{r_2 - r_1}{2} = 0,5$. Härur beräknas $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1,5^2 - 0,5^2} \approx 1,41$. Ellipsen area blir alltså $A = \pi ab = 6,64$. Vi beräknar nu areahastigheterna W genom att dividera areorna med perioderna. Detta ger

Inre cirkeln	Yttre cirkeln	Ellipsen
$W_1 = \frac{3,14}{2,83} \approx 1,11$	$W_2 = \frac{12,56}{8} \approx 1,57$	$W = \frac{6,64}{5,20} \approx 1,28$

Areahastigheten i en punkt i en bana ges allmänt av produkten av hastigheten i banan multiplicerad med avståndet till brännpunkten (radius vector). Detta gör att vi kan räkna ut hastigheten i banan för de olika fallen.

Inre cirkeln i A:	Ellipsen i A:
$v_1 = \frac{W_1}{r_1} = \frac{1,11}{1} \approx 1,11$	$v_A = \frac{W}{r_1} = \frac{1,28}{1} \approx 1,28$
Ellipsen i B:	Yttre cirkeln i B:
$v_B = \frac{W}{r_2} = \frac{1,28}{2} \approx 0,64$	$v_2 = \frac{W_2}{r_2} = \frac{1,57}{2} \approx 0,79$

Härav ser vi att hastigheten i A skall ökas från 1,11 till 1,28 för att banan skall bli elliptisk. Vi kan nu lätt beräkna den impuls som erfordras från raketmotorn. På samma sätt skall hastigheten i B ökas från 0,64 till 0,79 för att banan åter skall bli cirkulär.