FYSIKTÄVLINGEN

FINALTÄVLING

24 april 1999

LÖSNINGSFÖRSLAG

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

1. Data om accelerationen ger en uppskattning av bilens effekt. Kinetisk energi vid 100 km/h: 0,3 MJ. Denna energi fås på 10 sekunder vilket medför att effekten kan uppskattas till 30 kW. Eftersom verkningsgraden är 25% måste bensinen utveckla cirka 100 kW. Anta att vi kör med en fart i 100 km/h under en timme. Under denna tid förbrukar bilen cirka 10 liter bensin och omsätter en energi av 100 kW·3600 s ≈ 0,4 GJ vilket alltså blir 40 MJ/liter vilket är en grov, men ganska korrekt, uppskattning av energiinnehållet i en liter bensin.

2. Betrakta problemet från ett system som rör sig med båda bilarna. Periferin på lastbilens hjul rör sig där med farten 60 km/h = 16,7 m/s. Maximal skottvidd på stenen har man då kastvinkeln är 45°, då kastvidden ges av

$$x = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(16,7)^2}{10} \approx 30\,\mathrm{m}$$

Egentligen sker utkastet från en punkt något bakom och något ovanför hjulets beröringspunkt med marken men eftersom vi bara här gör en uppskattning försummas inverkan av detta.

3. Anta att friktionstalet är f och kalla planets lutningsvinkel för α. Man har då för klossens acceleration uppför respektive nedför planet

$$ma_{upp} = -mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha$$

$$ma_{ner} = -mg\sin\alpha + mgf\cos\alpha$$

där vi lagt positiv riktning uppåt och kallat tyngdaccelerationen för g.
Genom att addera och subtrahera dessa ekvationer får vi

$$a_{ner} + a_{upp} = -2g\sin\alpha$$

$$a_{upp} - a_{ner} = -2gf\cos\alpha$$

Divideras ekvationerna får vi

$$f = \tan\alpha\,\frac{a_{upp} - a_{ner}}{a_{ner} + a_{upp}}$$

Eftersom vi här har en kvot mellan accelerationer kommer resultatet inte att bero på vilka enheter vi använder för accelerationen. Ur grafen har vi

$$a_{upp} \approx \frac{-5,5}{2} = -2,75 \quad a_{ner} \approx \frac{-1,2}{2} = -0,6$$

dvs

$$f = \tan 2^\circ \frac{-2,75 + 0,6}{-2,75 - 0,6} \approx 0,022$$

4. a) Vid den angivna energin kommer heliumkärnan och blykärnan att beröra varandra och kraften mellan dem blir ej längre den som ges av Coulumbs lag. Detta ger oss en möjlighet att uppskatta avståndet mellan kärnorna.

Energilagen ger

$$\frac{mv_0^2}{2} + 0 = \frac{mv_{\min}^2}{2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$$

Sambandet $bv_0 = r_{\min} v_{\min}$ ger oss

$$v_{\min} = \frac{bv_0}{r_{\min}}$$

vilket insatt i energilagen ger oss

$$W_k = W_k \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$$

Om spridningsvinkeln är 60° har vi

$$b = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 \tan 30^\circ W_k}$$

vilket insatt i energiekvationen ger

$$r_{\min}^2 - 2r_{\min} \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 W_k} = \left(\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 \tan 30^\circ W_k} \right)^2$$

Löser vi denna andragradsekvation har vi

$$r_{\min} = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 W_k} \pm \sqrt{\left(\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 W_k} \right)^2 + \left(\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 \tan 30^\circ W_k} \right)^2} =$$

$$\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 W_k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 30^\circ}} \right) = \frac{3Qq}{8\pi\varepsilon_0 W_k}$$

Insättning av numeriska värden ger $r_{min} \approx 12$ fm d v s en radie på blykärnan som är ungeför 10 fm.

5. Följande beteckningar används

m = massa / varv $\quad$ M = hela fjäderns massa = $50m$

M_0 = viktens massa = 0,050 kg $\quad$ k = fjäderkonstant / varv

K = hela fjäderns fjäderkonstant = $k\ /\ 50$

L_1 = obelastad längd = 67 cm $\quad$ L_2 = belastad längd = 125 cm

d_{50} = översta varvets längd, obelastad

d_1 = nedersta varvets längd obelastad, $d_1 \approx 0$

b_{50} = översta varvets längd, belastad

b_1 = nedersta varvets längd belastad

$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

I båda fallen varierar d och b linjärt från d_1 till d_{50} och b_1 till b_{50}.

$$d_{50} = 49mg/k \qquad L_1 = 50\cdot(d_1 + d_{50})/2 = 25\cdot 49mg/k \tag{1}$$

$$b_1 = M_0 g/k \qquad b_{50} = (49m + M_0)g/k$$

$$L_2 = 50\cdot(b_1 + b_{50})/2 = 25\cdot(49m + 2M_0)g/k \tag{2}$$

ekv (2) - ekv(1) ger $L_2 - L_1 = 50M_0 g/k \quad \Rightarrow \quad k = 50M_0 g/(L_2 - L_1)$

$$k = 50\cdot 0,05\cdot 9,81/(1,25 - 0,67) = 42,28\ \mathrm{N/m}$$

$$K = k/50 = 0,8457\ \mathrm{N/m}$$

ekv (1) ger $m = k\cdot L_1/(25\cdot 49g) = 42,28\cdot 0,67/(25\cdot 49\cdot 9,81) = 0,002358\ \mathrm{kg}$

$$M = 50m = 0,1179\ \mathrm{kg} \approx 0,12\ \mathrm{kg}$$

6. Vridmomentet på trädet blir

$$M(\theta) = -k\theta + mgL\sin\theta$$

För små vinklar har vi

$$M(\theta) \approx -k\theta + mgL\theta = \theta[mgL - k]$$

Om $k > mgL$ får man ett moment som blir återställande d v s jämviktsvinkeln kommer att bli noll. Gränsfallet ges av

$$m < m_{kritisk} = \frac{k}{Lg}$$

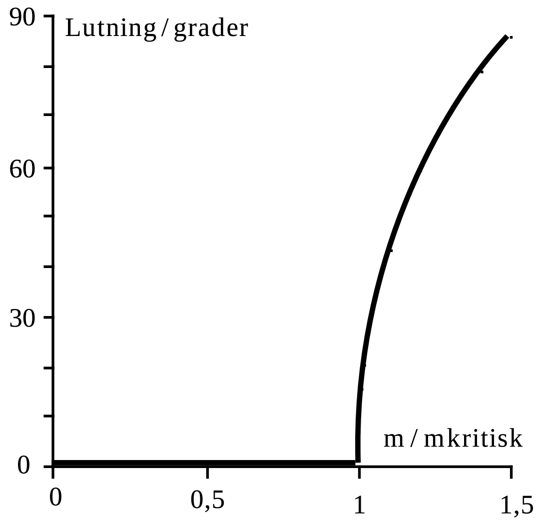
För att se vad som händer om $m > m_{kritisk}$ tar vi med ytterligare en term i serieutvecklingen

$$M(\theta) \approx -k\theta + mgL\theta - mgL\frac{\theta^3}{6} = \frac{mgL\theta}{6}\left[6\left(1 - \frac{m_{kritisk}}{m}\right) - \theta^2\right]$$

Jämviktsvinkeln för detta fall får vi då momentet sättes till noll dvs

$$\theta = \sqrt{6\left(1 - \frac{m_{kritisk}}{m}\right)}$$

För vinklar som är större än denna vinkel blir vridmomentet negativt, för en mindre vinkel blir momentet positivt dvs lösningen är stabil. Man får även en lösning $\theta = 0$ som emellertid svarar mot ett instabilt tillstånd. Jämviktsvinkeln växer mycket snabbt för $m > m_{kritisk}$, se grafen här bredvid.



Ett annat sätt att kvalitativt undersöka detta system är att studera

$$M(\theta) = -k\theta + mgL\sin\theta = -mgL\left(\frac{k}{mgL}\theta - \sin\theta\right) = 0$$

Detta kan göras genom att titta på graferna av $y = \frac{k}{mgL}\theta$ respektive $y = \sin\theta$ i samma diagram. För små värden på m har vi att den räta linjen $y = \frac{k}{mgL}\theta$ endast konner att skära sinuskurvan i $\theta = 0$, medan för större värden på m får vi två skärningspunkter: $\theta = 0$ och $\theta \neq 0$, den senare blir den stabila vinkeln.

7 a) För en cirkulär bana utanför galaxens massfördelning har vi

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$$

eller

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \propto r^{-1/2}$$

b) För en cirkulär bana inne i galaxen har vi att den del av massan som ligger innanför en sfär med banans radie ges av

$$M\frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3} = M\frac{r^3}{R^3}$$

Detta ger oss för centripetalkraft = gravitationskraft

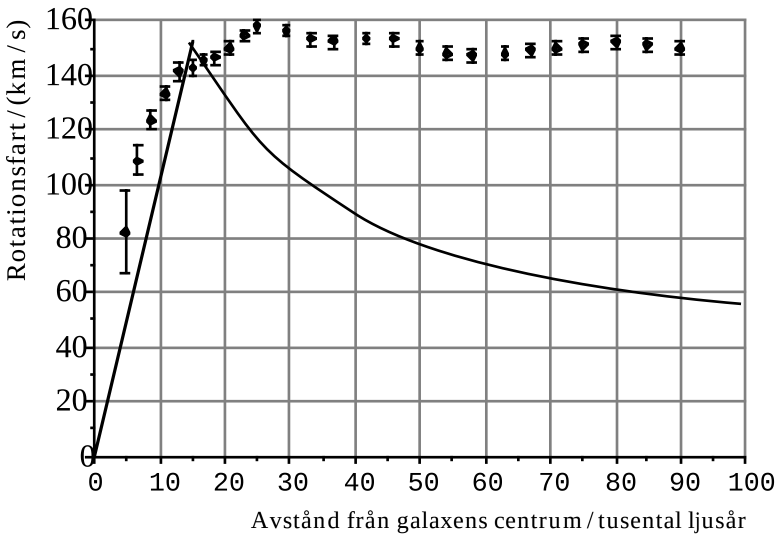
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gm}{r^2}M\frac{r^3}{R^3}$$

eller

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}r \propto r$$

/s)

c)



En slutsats av jämförelse mellan modell och data är att galaxen måste innehålla en stor mängd osynlig s k *mörk materia* i form av en mer eller mindre sfärisk halo som sträcker sig mycket långt ut från den synliga galaxen. Massan på denna mörka materia visar sig vara mer än tio gånger den synliga materien i galaxen.

8. Eftersom utsträckningen av en galax är 1 / 10 av avståndet mellan galaxerna, kommer volymen av de klotformiga molnen att uppta ungefär 1 / 1000 av universums volym. Detta betyder att densiteten av neutriner i molnet kommer att vara 10^{11} / m^3
Antalet neutriner inom en sfär med radien R = 100 000 ljusår ≈ 10^{21} m blir då

$$4\pi R^3 / 3 \cdot 10^{11} \approx 4 \cdot 10^{63} \cdot 10^{11} = 4 \cdot 10^{74}$$

Massan av dessa neutriner blir

$$4 \cdot 10^{74} \cdot m_\nu = 4 \cdot 10^{74} \cdot m_\nu c^2 / c^2 =$$

$$4 \cdot 10^{74} \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} / (9 \cdot 10^{16})\text{kg} \approx 10^{38}\,\text{kg}$$

Tio gånger den synliga galaxens massa är $10 \cdot 10^{41}\,\text{kg} = 10^{42}\,\text{kg}$ vilket är mycket större än neutrinernas massa. Neutrinerna kan alltså inte utgöra den mörka materien i en galax.