FYSIKTÄVLINGEN

Finalen - teori
20 april 2002

LÖSNINGSFÖRSLAG

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

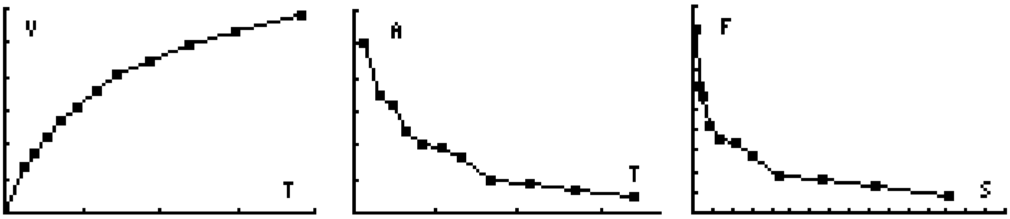
1. **a)** Den kompletterade tabellen ser ut enligt följande

Tid/s	Hastighet/(m/s)	Acceleration (m/s^2)	Kraft (N)	Sträcka (m)	Arbete (Nm)
0	0				
2,7	13,4	4,96	8735	18	158013
4	17,9	3,46	6092	20	123948
5,4	22,4	3,21	5657	28	159588
7,2	26,8	2,44	4302	44	190502
9,4	31,3	2,05	3600	64	230076
11,8	35,8	1,88	3300	81	265716
14,5	40,2	1,63	2868	103	294272
18,8	44,7	1,05	1842	183	336204
24	49,2	0,87	1523	244	371844
29,9	53,6	0,75	1313	303	398042
38,1	58,1	0,55	966	458	442332
				1546	2970537

Anmärkningar

- Accelerationen är en medelaccelaration under det föregående tidsintervallet.
- Kraften är en medelkraft under det föregående tidsintervallet.
- Sträckan och arbetet avser förhållanden vid det föregående tidsintervallets slut.

Utseendet av diagrammen framgår av följande grafer



b) Av tabellen framgår att det totala arbetet som summerats i den sista kolumnen blir 2,97 MJ.

Den kinetiska energin för bilen ges av massan och sluthastigheten enligt

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \approx \frac{1760 \cdot 58{,}1^2}{2} \approx 2{,}97\ \text{MJ}$$

Svar: Det uträttade mekaniska arbetet är lika stort som bilens rörelseenergi – 2,97 MJ.

2 a) Antalet kärnor av ^{40}K ges av

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

och aktiviteten från dessa ges av

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \approx \lambda \cdot N_0$$

eftersom $\lambda \cdot t$ är litet – vi räknar ju för $t = 1$ s.

Vi har $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1{,}28 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}\ \mathrm{s}^{-1} \approx 1{,}72 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}$

och $N_0 = \frac{m}{40\ \mathrm{u}} = \frac{0{,}00012 \cdot 0{,}2}{40 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}$ kärnor $\approx 3{,}61 \cdot 10^{20}$ kärnor av ^{40}K. (m är massan av ^{40}K.)

Detta ger aktiviteten

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N_0 \approx 1{,}72 \cdot 10^{-17} \cdot 3{,}61 \cdot 10^{20}\ \mathrm{Bq} \approx 6209\ \mathrm{Bq}.$$

Det betyder att aktiviteten från 1 kg mänsklig vävnad ges av

$$\frac{6209}{70} \approx 89\ \mathrm{Bq/kg}$$

Svar: 89 Bq/kg

b) Under ett år sönderfaller då $89 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 2{,}8 \cdot 10^9$ kärnor. Varje sönderfall ger energin1,31 MeV. Om all denna energi skulle absorberas i den vävnad som utsänder den skulle den årliga dosen bli

$$2{,}8 \cdot 10^9 \cdot 1{,}31 \cdot 10^6 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/kg} \approx 0{,}59\ \mathrm{mJ/kg} = 0{,}59\ \mathrm{mSi}.$$

(Eftersom inte all energi absorberas av vävnaden blir med hänsyn till detta och biologiska faktorer stråldosen istället 0,17 mSi enligt artikeln i *europhysicsnews*.)

Svar: 0,59 mSi

3 a) Om tyngden av behållaren försummas betyder det att behållaren med vätgasen kommer att stiga till dess att den omgivande atmosfären har samma densitet som vätgasen.
Enligt allmänna gaslagen gäller

$$pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{M} = \rho \cdot \frac{RT}{M} \quad \text{d v s} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT}h}}{p_0} = e^{-\frac{Mg}{RT}h}$$

Efter logaritmering fås

$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{Mg}{RT} h$ (M är luftens molmassa $M \approx 0{,}781 \cdot 28 + 0{,}209 \cdot 32 \approx 28{,}6$ g

som ger

$$h = \frac{RT \ln \frac{\rho_0}{\rho}}{Mg} \approx \frac{8{,}315 \cdot 273 \cdot \ln \frac{1{,}29}{0{,}0899}}{0{,}0286 \cdot 9{,}82} \approx 22\ \mathrm{km}$$

Svar: Vätgasbehållaren skulle stiga ungefär 2 mil.

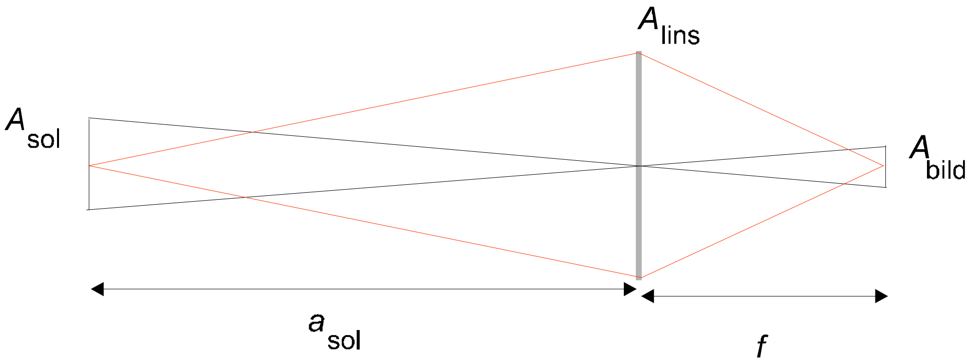
b) Lyftkraften på behållaren är skillnaden mellan den undanträngda luftens tyngd och tyngden av gasen i behållaren dvs förhållandet mellan lyftkrafterna blir

$$\frac{(\rho_{\text{luft}} - \rho_{\text{helium}}) \cdot Vg}{(\rho_{\text{luft}} - \rho_{\text{väte}}) \cdot Vg} \approx \frac{1{,}29 - 0{,}1785}{1{,}29 - 0{,}0899} \approx 0{,}926$$

Lyftkraften sjunker alltså endast med 7,4 % om vätgasen byts mot helium.
Svar: Lyftkraften sjunker med 7,4 %.

4. Den effekt som strålar ut från solen är enligt Stefans – Boltzmanns lag

$$P = A_{sol} \cdot \sigma \cdot T_{sol}^4$$



Av denna effekt träffas linsen av

$$P_{lins} = \frac{\pi \cdot r_{lins}^2}{4\pi \cdot a_{sol}^2} \cdot A_{sol} \cdot \sigma \cdot T_{sol}^4 = \frac{\pi \cdot r_{lins}^2}{4\pi \cdot a_{sol}^2} \cdot 4\pi\, r_{sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{sol}^4 = \frac{\pi \cdot r_{lins}^2 \cdot r_{sol}^2}{a_{sol}^2} \cdot \sigma \cdot T_{sol}^4$$

Denna effekt tillföres den svarta skivan som bilden av solen hamnar på. Vid temperaturjämvikt strålar den svarta skivan ut lika mycket som den mottar. Skivan förutsätts vara ”svart” och strålar både från sin fram och baksida d v s den strålande arean är $2 \cdot A_{bild}$. Bilden storlek kan uttrycka med hjälp av solskivans area eftersom areaskalan är kvadraten på längdskalan. (Radier betecknas med *r* följt av index.)

$$P_{ut} = 2 \cdot \pi \cdot r_{bild}^2 \cdot \sigma \cdot T_{skiva}^4 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{f^2}{a_{sol}^2} \cdot r_{sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{skiva}^4$$

Enligt energiprincipen måste den effekt som träffar linsen vara lika med den effekt som strålar ut från den svarta skivan – vi bortser från förluster i linsen.

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{f^2}{a_{sol}^2} \cdot r_{sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{skiva}^4 = \frac{\pi \cdot r_{lins}^2 \cdot r_{sol}^2}{a_{sol}^2} \cdot \sigma \cdot T_{sol}^4$$

Efter förenkling får vi då

$$T_{skiva}^4 = \frac{r_{lins}^2}{2f^2} \cdot T_{sol}^4 \approx \frac{0{,}05^2}{2 \cdot 0{,}5^2} \cdot 5800^4 \text{ K}^4 \text{ som ger}$$

$$T \approx 1542 \text{ K}$$

Svar: Skivan får temperaturen 1 500 K.

5. a) Den elektromagnetiska kraften ges av Coulombs lag

$$F_e = \frac{K \cdot e^2}{r^2}.$$

Gravitationskraften ges av gravitationslagen

$$F_g = \frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2}$$

Det sökta förhållandet blir

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{K \cdot e^2}{r^2}}{\frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2}} = \frac{K \cdot e^2}{G \cdot m_e \cdot m_p} \approx \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot (1{,}602 \cdot 10^{-19})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{39}$$

Svar: Krafterna förhåller sig som $2{,}3 \cdot 10^{39}$.

b) Elektronen antas röra sig i en cirkelbana kring protonen och centripetalkraften ges av gravitationskraften. Vidare skall enligt Bohrs postulat de Broglievåglängden för elektronen rymmas en gång i den innersta banan. Detta ger med vanliga beteckningar ekvationerna

$$\frac{m_e \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot m_e \cdot m_p}{r^2}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} = 2\pi r$$

Den andra ekvationen ger

$v = \dfrac{h}{2\pi r m_e}$ som insatt i den första ekvationen ger

$$r = \frac{h^2}{4\pi^2 \cdot m_e^2 \cdot m_p \cdot G} \approx \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})^2}{4\pi^2 \cdot (0{,}91 \cdot 10^{-30})^2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} \text{ m} \approx 1{,}2 \cdot 10^{29} \text{ m} \approx 1{,}3 \cdot 10^{13} \text{ ljusår}$$

Detta betyder att väteatomen skulle vara större än hela det synliga universum. Om universum är 15 miljarder år ser vi ju högst lika många ljusår ut i rymden.

Svar: Elektronens banradie skulle bli $1{,}2 \cdot 10^{29}$ m eller $1{,}3 \cdot 10^{13}$ ljusår d v s större än hela synliga universum.

6. a) Då elektronerna accelereras av spänningen U får de energin eU. Detta blir då också den maximala energi som röntgenstrålningen kan ha d v s

$$eU = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

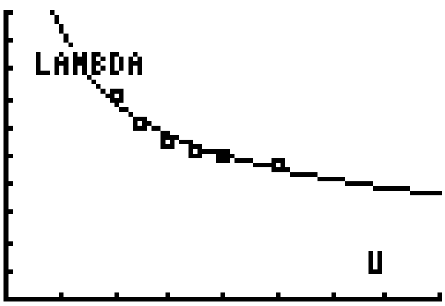
som omformas till

$$U\lambda = \frac{hc}{e} \approx \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}602 \cdot 10^{-19}} \text{ V} \cdot \text{m} \approx 1{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ Vm}$$

vilket väl stämmer överens med artikelförfattarens experimentella värden.

b) De experimentella värden på U och λ_{max} används för att rita en graf med λ_{max} som funktion av U. Till dessa mätpunkter anpassas en funktion med hjälp av PwrReg på en grafisk räknare som ger $\lambda_{max} = 6{,}15 \cdot 10^{-9} \cdot U^{-0{,}454}$

U/kV	λ_{max}/pm
20	71,0
25	62,0
30	55,5
35	52,0
40	50,0
50	47,0



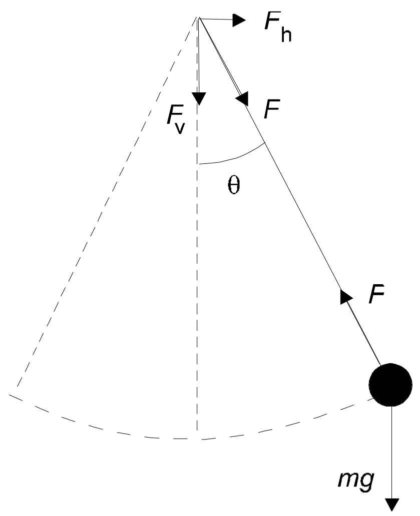
Svar: Artikelförfattaren kan hävda att $\lambda_{max} \cdot \sqrt{U} =$ konstant.

7. a) Den vertikala kraftkomposanten återges i Diagram A – den har hela tiden samma tecken (riktning). Det högsta värdet registreras då vikten passerar jämviktsläget. Efter en halv svängning återupprepas förloppet. Det betyder att den registrerade perioden i Diagram A är halva pendelns period. Diagrammet ger för pendeln 2,12 s.
Diagram B visar den horisontella komposanten som är noll då jämviktsläget passeras. Perioden i Diagram B är lika med den plana pendelsvängningens period. Diagrammet ger perioden 2,12 s.
Pendellängden kan bestämmas ur sambandet

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}} \text{ som ger } \ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx \frac{2{,}12^2 \cdot 9{,}82}{4\pi^2} \text{ m} \approx 1{,}12 \text{ m}.$$

Detta förutsätter att vinkeln är förhållandevis liten.

I trådens riktning verkar under rörelsen kraften F som tillsammans med Newtons andra lag ger



$$F(\theta) - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell}$$

Enligt energiprincipen gäller

$$\frac{mv^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(1 - \cos\alpha)$$

där α är den största utslagvinkeln.
Dessa båda ekvationer ger

$$F(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)$$

som har komposanterna

$$F(\theta)_v = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\cdot\cos\theta \text{ och}$$

$$F(\theta)_h = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)\cdot\sin\theta$$

Då $\theta = \alpha$ d v s i vändläget gäller

$$F(\theta)_v = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha)\cdot\cos\alpha = mg\cdot(\cos\alpha)^2$$

$$F(\theta)_h = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha)\cdot\sin\theta = mg\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$

I vändläget gäller enligt Diagram A och B

$$mg\cdot(\cos\alpha)^2 = 0{,}75 \text{ N}$$

$$mg\cos\alpha\cdot\sin\alpha = 0{,}35 \text{ N}$$

Dessa båda ekvationer ger
α = 25° och m = 93 g

Svar: Svängningtiden är 2,1 s. Pendellängden är 1,10 m. Den största utslagsvinkeln är 25°. Pendelkulans massa är 93 g.

8. Den laddade kondensatorn har från början
laddningen - $Q_0 = C_1 U_0$
energin - $W_0 = \frac{1}{2} C_1 U_0^2$
Då den oladdade kondensatorn anslutits blir strömmen i kretsen så småningom noll och spänningen, U, över kondensatorerna därmed lika. Då gäller att

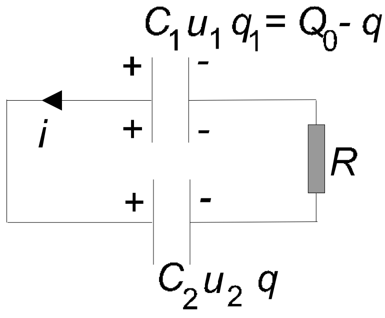
$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \Leftrightarrow C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U \Leftrightarrow U = \frac{C_1 U_0}{C_1 + C_2}$$

och

$$W = \frac{1}{2}C_1U^2 + \frac{1}{2}C_2U^2 = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \cdot U_0^2$$

Energiförlusten blir alltså

$$\Delta W = W_0 - W = \frac{1}{2}C_1U_0^2 - \frac{C_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}U_0^2 = \frac{1}{2}C_1U_0^2\left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}U_0^2$$



Urladdningen av C_1 ger en uppladdning av C_2. Enligt Kirchhoffs spänningslag gäller

$u_1 - u_2 - Ri = 0$ där $i = \frac{dq}{dt}$ (q är laddningen på C_2.).

Detta ger

$$\frac{Q_0 - q}{C_1} - \frac{q}{C_2} - R\frac{dq}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{Q_0}{C_1} - \frac{q}{C_1} - \frac{q}{C_2} - R\frac{dq}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{Q_0}{C_1} - q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) - R\frac{dq}{dt} = 0$$

som tillsammans med $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (C är ersättningskapacitansen till de båda kondensatorerna i kretsen) ger $Ri + \frac{1}{C}q = \frac{Q_0}{C_1}$ och efter derivation differentialekvationen

$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$ med lösningen $i = i_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$, där startströmmen $i_0 = \frac{U_0}{R}$.

Det utvecklade värmet i kretsen blir då

$$\Delta W = \int_0^\infty R \cdot i^2 dt = \int_0^\infty R \cdot \frac{U_0^2}{R^2} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{U_0^2}{R}\left[-\frac{RC}{2} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{U_0^2C}{2} = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}U_0^2$$

Energiförlusten motsvaras alltså helt av värmeutvecklingen i kretsen och är oberoende av kretsens resistans eftersom R inte finns med i det härledda uttrycket för värmet.