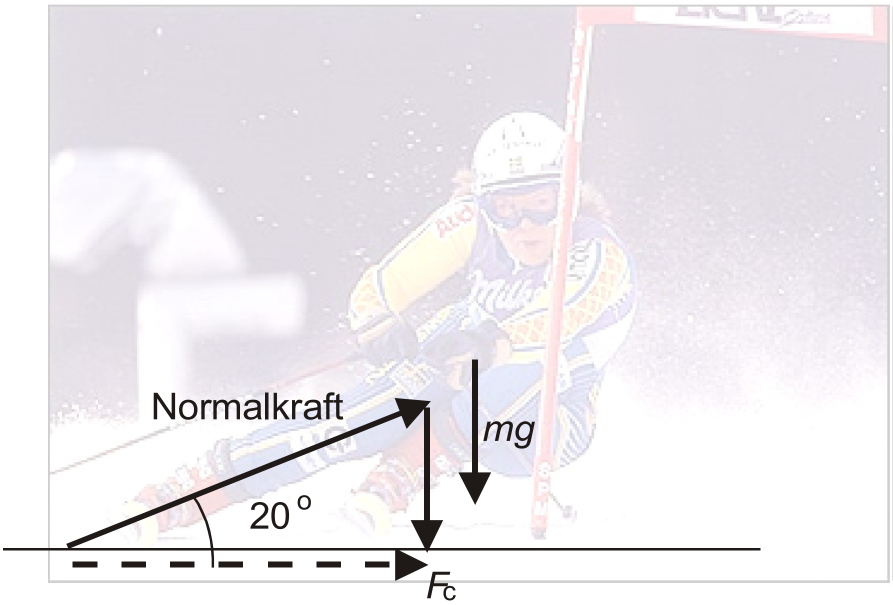
FYSIKTÄVLINGEN

Finalen - teori
23 april 2005

LÖSNINGSFÖRSLAG

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

1. Kraftresultanten till Anjas tyngd och normalkraften på den snedställda skidan utgör centripetalkraft i Anjas centralrörelse. Vi kan anta att hela normalkraften finns utefter högerbenet.



$\tan 20^\circ = \dfrac{mg}{F_c}$ det vill säga $F_c = \dfrac{mg}{\tan 20^\circ}$

För centripetalrörelsen gäller

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

Detta ger $\dfrac{mg}{\tan 20^\circ} = \dfrac{mv^2}{r}$ d v s $v^2 = \dfrac{rg}{\tan 20^\circ}$ d v s

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\tan 20^\circ}} \approx \sqrt{\frac{23 \cdot 9{,}82}{\tan 20^\circ}} \approx 25 \text{ m/s} \approx 90 \text{ km/h}$$

Svar: Anjas hastighet i svängen är ca 90 km/h.

2. Exempel på kortfattade beskrivningar.

Den brownska rörelsen

Den engelske botanisten Robert Brown hade vid mikroskopiska studier observerat att de partiklar han studerade rörde sig ganska planlöst – kaotiskt. Einstein ansåg att denna rörelse orsakades av kollisioner med betydligt mindre partiklar – molekyler som ej kunde observeras direkt. Einsteins teoretiska behandling av molekylernas värmerörelse gav honom också möjligheten att bestämma Avogadros tal.

Den fotoelektriska effekten
Einstein gav här en kvantfysikalisk förklaring till den tidigare kända fotoelektriska effekten. Hans beräkningar visade att det infallande ljuset måste ha tillräckligt hög frekvens för att kunna frigöra fotoelektroner. Den infallande fotonens energi är proportionell mot strålningens frekvens. Om den infallande fotonens energi är tillräckligt stor – större än materialets utträdesarbete slås en fotoelektron ut med den återstående energin som rörelseenergi. Einsteins kvantfysikaliska förklaring innebar att den allmänt accepterade vågmodellen för ljuset kompletterades med en partikelmodell. De båda modellerna som förefaller oförenliga kompletterar varandra.

Den speciella relativitetsteorin
I denna teori kombinerar Einstein vår uppfattning om rum och tid till en fyrdimensionell rum-tid. Han utgår från postulatet att ljusets fart är densamma i alla koordinatsystem. Detta leder till längdkontraktionen, som innebär att föremål som rör sig trycks ihop i färdriktningen. Vidare går tiden långsammare i ett sådant system – tidsdilatationen. Dessa effekter är onaturliga enligt våra erfarenheter av koordinatsystem med låga hastigheter i förhållande till varandra.

3. Eftersom färgen uppkommer genom interferens i tunna skikt inleder vi med att beräkna den optiska gångvägskillnaden mellan stråle 1 och 2.

$$\Delta L = 2 \cdot (1{,}53 \cdot 65 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} + 130 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}) \approx 459\ \mathrm{nm}$$

Eftersom både stråle 1 och 2 reflekteras mot tätare medier fasförskjuts bägge strålarna en halv ljusvåglängd. Då bägge strålarna påverkas lika mycket blir nettofasförskjutningen noll. Konstruktiv interferens inträffar då den optiska gångvägskillnaden är ett helt antal våglängder, d.v.s. då

$$\Delta L = p \cdot \lambda \Leftrightarrow 459\ \mathrm{nm} = p \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{459\ \mathrm{nm}}{p}.$$

Av resultatet framgår att $p = 1$ är det enda heltalsvärde som ger en våglängd i det synliga området. Ljusvåglängden för det ljus som fjärilens vingar reflekterar är således 459 nm.

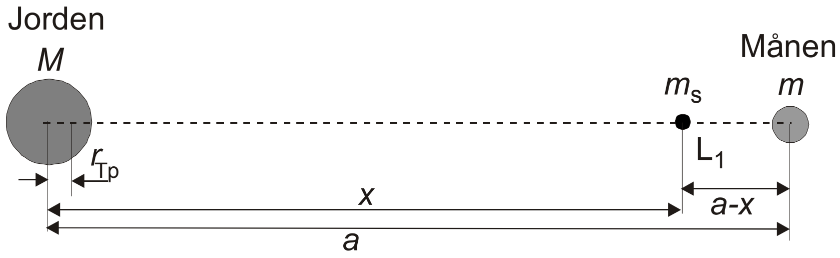
Svar: Fjärilens vingar ger upphov till konstruktiv interferens för våglängden 459 nm.

4. Jorden och Månen roterar kring den gemensamma tyngdpunkten för de båda himlakropparna. Den gemensamma tyngdpunkten ligger på avståndet r_{Tp} från Jordens centrum. För tyngdpunkten gäller sambandet
$Mr_{\mathrm{Tp}} = m(a - r_{\mathrm{Tp}})$ där *a* är avståndet mellan Jordens och Månens medelpunkter.
Detta ger

$$r_{\mathrm{Tp}} = \frac{ma}{m + M} \approx \frac{7{,}349 \cdot 10^{22} \cdot 3{,}844 \cdot 10^{8}}{7{,}349 \cdot 10^{22} + 5{,}974 \cdot 10^{24}}\ \mathrm{m} \approx 4{,}671 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$$

Denna punkt befinner sig under jordytan – jordradien är $6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$.

Månens avstånd till den gemensamma tyngdpunkten är $a - r_{\mathrm{Tp}} = \dfrac{Ma}{m + M}$.



För Månens omloppstid gäller

$$\frac{GmM}{a^2} = m\frac{Ma}{m+M}\cdot\frac{4\pi^2}{T^2} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m+M)}$$

I lagrangepunkten L_1 gäller enligt uppgiftstexten

$$\frac{Gm_sM}{x^2} - \frac{Gm_sm}{(a-x)^2} = m_s(x-r_{Tp})\frac{4\pi^2}{T^2} \Leftrightarrow \frac{GM}{x^2} - \frac{Gm}{(a-x)^2} = \frac{(x-r_{Tp})4\pi^2}{T^2}$$

Med insatt uttryck för T^2 (se ovan) gäller

$$\frac{GM}{x^2} - \frac{Gm}{(a-x)^2} = \frac{(x-r_{Tp})4\pi^2}{\dfrac{4\pi^2 a^3}{G(m+M)}}$$

som efter omskrivning blir

$$\frac{M}{x^2} - \frac{m}{(a-x)^2} - \frac{(x-r_{Tp})(m+M)}{a^3} = 0$$

Dividera till sist uttrycket med M och sätt $\frac{m}{M} = k$.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{k}{(a-x)^2} - \frac{(x-r_{Tp})(k+1)}{a^3} = 0$$

Enligt tabell och beräkningar gäller

$M = 5{,}974\cdot 10^{24}$ kg

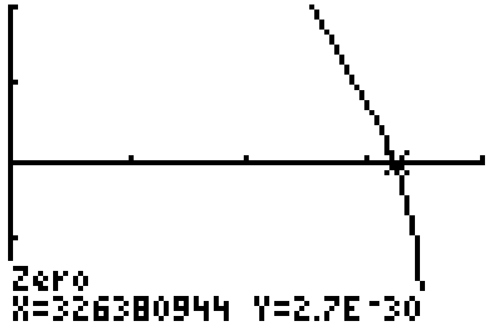
$m = 7{,}349\cdot 10^{22}$ kg

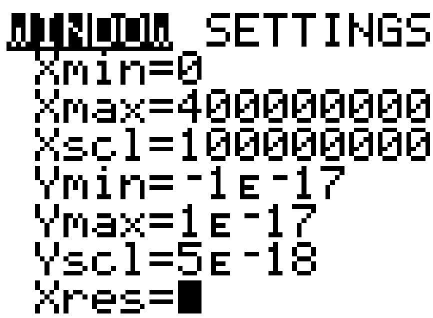
$\frac{m}{M} \approx 0{,}01230$

$a = 3{,}844\cdot 10^{8}$ m

$r_{Tp} = 4{,}671\cdot 10^{6}$ m

Uttrycket ritas med hjälp av en grafritande räknare och nollstället för uttrycket bestäms till $x = 3{,}264\cdot 10^{8}$ m





Satellitens hastighet i banan kan beräknas med sambandet

$$v = (x - r_{\mathrm{Tp}})\omega = (x - r_{\mathrm{Tp}})\cdot\frac{2\pi}{T} \approx (3{,}264\cdot10^{8} - 4{,}671\cdot10^{6})\cdot\frac{2\pi}{(27{,}32\cdot24\cdot3600)}\ \mathrm{m/s} \approx 856\ \mathrm{m/s}$$

Anmärkning.

Uppgiftstextens beskrivning kan uttryckas enligt nedanstående samband om man antar att r_{Tp} kan försummas - $r_{\mathrm{Tp}} << a$.

$$\frac{Gm_{\mathrm{s}}M}{x^2} - \frac{Gm_{\mathrm{s}}M}{(a-x)^2} = m_{\mathrm{s}}x\frac{4\pi^2}{T^2}$$

som kan omformas till

$$\frac{GM}{x^2} - \frac{GM}{(a-x)^2} - x\frac{4\pi^2}{T^2} = 0$$

Insatta tabellvärden på *G, M, a* och *T* ger

$$\frac{3{,}986\cdot10^{14}}{x^2} - \frac{4{,}904\cdot10^{12}}{(3{,}844\cdot10^{8} - x)^2} - 7{,}086\cdot10^{-12}x = 0$$

Numerisk lösning ger $x \approx 3{,}260\cdot10^{8}$ m

Svar: Avståndet är $3{,}264\cdot10^{8}$ m och hastigheten är 856 m/s

5. a) För att få sambandet $R_f = R(f)\cdot\Delta f = \frac{2\pi h}{c^2}\cdot\frac{f^3}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1}\cdot\Delta f$ uttryckt med λ som variabel

ersätter vi $f = \frac{c}{\lambda}$ och $|\Delta f| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta\lambda}\cdot\Delta\lambda\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}\cdot\Delta\lambda\right| = \left|\frac{\partial\frac{c}{\lambda}}{\partial\lambda}\cdot\Delta\lambda\right| = \left|-\frac{c}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda\right| = \frac{c}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda$

Detta ger $R_\lambda = R(\lambda)\cdot\Delta\lambda = \frac{2\pi}{c^2}\cdot\frac{\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3}{\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}\cdot\frac{c}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}\cdot\Delta\lambda$

b) Resultatet framgår av diagrammet nedan. Kurvan har maximum för frekvensen $f = 1{,}5292\cdot10^{-9}$ Hz .

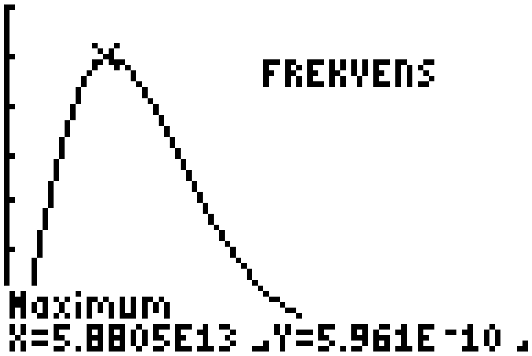
Wiens förskjutningslag ger $f_{\mathrm{Max}} = 0{,}589\cdot10^{11}\cdot T = 0{,}589\cdot10^{11}\cdot1000\ \mathrm{Hz} = 5{,}89\cdot10^{13}$ Hz

Detta är i överensstämmelse med det numeriska resultatet i det vänstra diagrammet.

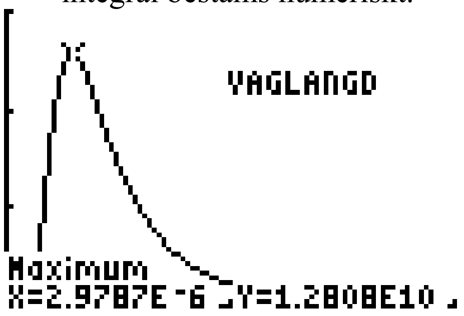
Stefans-Boltzmanns lag ger den totalt utstrålade effekten som

$$P = \sigma T^4 = 56{,}7\cdot10^{-9}\cdot(10^3)^4\ \mathrm{W/m^2} = 56700\ \mathrm{W/m^2}$$

Vilket också är i överensstämmelse med det högra diagrammet.



c) $R(\lambda) = \dfrac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}$ ritas in på räknaren och våglängden för kurvans maximum samt integral bestäms numeriskt.



Wiens förskjutningslag ger $\lambda_{\text{Max}} \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ d v s $\lambda_{\text{Max}} = 2{,}898 \cdot 10^{-6}$ om $T = 1000$ K
Detta är i överensstämmelse med det numeriska resultatet i det vänstra diagrammet.
Stefans-Boltzmanns lag ger den totalt utstrålade effekten som

$$P = \sigma T^4 = 56{,}7 \cdot 10^{-9} \cdot (10^3)^4 \text{ W/m}^2 = 56700 \text{ W/m}^2$$

Vilket också är i överensstämmelse med det högra diagrammet.

d) I både b) och c) får vi den totalt utstrålade effekten till ungefär samma värde vid den numeriska beräkningarna.
Den erhållna frekvensen 0,588 THz för maximum motsvarar dock en våglängd på $5{,}8 \cdot 10^{-6}$ m som inte alls stämmer överens med den erhållna våglängden $2{,}98 \cdot 10^{-6}$ m. Denna ”avvikelse” förklaras dock av att man vid frekvensrepresentationen använder sig av frekvensintervallet Δf som vid våglängdsrepresentationen motsvaras av olika värden på $\Delta\lambda$ vid olika våglängder eftersom

$$|\Delta f| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta\lambda} \cdot \Delta\lambda\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial\lambda} \cdot \Delta\lambda\right| = \left|\frac{\partial \frac{c}{\lambda}}{\partial\lambda} \cdot \Delta\lambda\right| = \left|-\frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda\right| = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$$