Lösningsförslag

1.
Vi approximerar det elektriska fältet mellan de böjda sfäriska skalen med
$E = \frac{0,4}{0,02}$ V/m=20 V/m. Den laddade partikeln rör sig där i en cirkelbana med radien,
r_1 = 0,10 m. Kraften, F_1, på partikeln från det elektriska fältet är hela tiden vinkelrät mot partikelns rörelseriktning. Vi har att $F_1 = qE$ där q är en elementarladdning. F_1 utgör också en centripetalkraft, $F_1 = mv^2/r_1$ där v är partikelns (konstanta) hastighet och m är dess massa. De två uttrycken för kraften F_1 leder till att $mv^2 = qE\, r_1$.

a) Partikeln har endast kinetisk energi, $\frac{mv^2}{2} = \frac{qEr_1}{2}$ = $1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 20 \cdot 0,10/2$ J = 1 eV
b) När partikeln kommer ut i magnetfältet kommer den att påverkas av en kraft $F_2 = qvB$ där B=7,22 mT är fältstyrkan. Även denna kraft utgör en centripetalkraft, $F_2 = mv^2/r_2$ där r_2 = 0,080 m. Vi har $qE = mv^2/r_1$ och $qvB = mv^2/r_2$.
Detta kan förenklas till $Er_1 = vBr_2$ som ger $v = \frac{Er_1}{Br_2}$.

Vi har också $m = \frac{qEr_1}{v^2}$ i vilket vi sätter in vårt uttryck för v.

Vi får $m = \frac{qEr_1}{\left(\frac{Er_1}{Br_2}\right)^2} = \frac{qB^2r_2^2}{Er_1} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \left(7,22 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0,08^2}{20 \cdot 0,10}$ kg.

$m = 2,67 \cdot 10^{-26}$ kg = 16,1 u. (Det verkar vara en syrejon)

2.
a) Vi säger att under tiden dt kolliderar satelliten med luft med massan m_{luft}. Under denna tid har satelliten kolliderat med all luft som ryms i volymen $A \cdot v_{sat} \cdot dt$ där A är satellitens tvärsnittsarea och v_{sat} är satellitens hastighet. Den har då kolliderat med en luftmassa, $m_{luft} = A \cdot v_{sat} \cdot dt \cdot \rho$, där ρ är luftens densitet.

Rörelsemängdens bevarande ger $m_{luft} \cdot 0 + m_{sat} \cdot v_{sat} = m_{luft} \cdot v_{sat} + m_{sat} \cdot (v_{sat} + \Delta v_{sat})$

$\Delta v_{sat} = - m_{luft} \cdot v_{sat} / m_{sat} = -A \cdot v_{sat} \cdot dt \cdot \rho \cdot v_{sat} / m_{sat}$

Detta ger att satellitens acceleration blir $a = \Delta v_{sat} / dt = -A \cdot v_{sat}^2 \cdot \rho / m_{sat}$.
Denna acceleration innebär att satelliten påverkas av en kraft $F = m_{sat} \cdot a = -A \cdot v_{sat}^2 \cdot \rho$

b) Jordens radie är 6378 km och satellitens bana är 200 km ovan marken. Vi approximerar satellitens bana med en cirkel med radien, r=6578 km. På grund av friktion tappar satelliten energin
$\Delta E = Fs = -A \cdot v_{sat}^2 \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot r$ på ett varv.

För centripetalkraften F_{cp} på satelliten gäller $F_{cp} = \frac{M \cdot m_{sat} \cdot G}{r^2}$ där M är jordens massa och G är den universella gravitationskonstanten. För centripetalkraften gäller också att $F_{cp} = \frac{m_{sat} \cdot v_{sat}^2}{r}$ vilket ger att $v_{sat}{}^2 = \frac{M \cdot G}{r}$.

Friktionsenergin kan nu skrivas $\Delta E = -A \cdot M \cdot G \cdot \rho \cdot 2\pi$.

Eftersom satelliten förlorar energi kommer dess hastighet och höjd över jordytan att förändras. Satelliten har först hastighet v_1 och radien av dess bana är $r_1 = 6578$ km.

Vi kan skriva satellitens rörelseenergi som $\frac{m_{sat} \cdot v_1{}^2}{2} = \frac{m_{sat} \cdot M \cdot G}{2r_1}$. Efter ett varv har hastigheten ändrats till v_2 och radien minskat till $r_2 = r_1 - \Delta r$. Satellitens rörelseenergi är nu

$$\frac{m_{sat} \cdot v_2{}^2}{2} = \frac{m_{sat} \cdot M \cdot G}{2r_2} = \frac{m_{sat} \cdot M \cdot G}{2(r_1 - \Delta r)} .$$

Satellitens potentiella energi har också förändrats under varvet och beräknas som gravitationskraften multiplicerat med höjdförändringen. $F_{cp} \cdot \Delta r = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{m}_{\mathrm{sat}} \cdot G}{r_1^2} \cdot \Delta r$

Vi använder nu energiprincipen och sätter upp att satellitens energi före minus friktionsenergin är lika med energin efter:

$$\frac{m_{sat} \cdot M \cdot G}{2r_1} + \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{m}_{\mathrm{sat}} \cdot G}{r_1^2} \cdot \Delta r - A \cdot M \cdot G \cdot \rho \cdot 2\pi = \frac{m_{sat} \cdot M \cdot G}{2(r_1 - \Delta r)}$$

Vilket kan förenklas till

$$\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_1^2} \cdot \Delta r - \frac{A \cdot \rho \cdot 2\pi}{m_{sat}} = \frac{1}{2(r_1 - \Delta r)}$$

Vi sätter $C = \frac{A \cdot \rho \cdot 2\pi}{m_{sat}} = \frac{1{,}00 \cdot 5 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi}{250} m^{-1} = 1{,}26 \cdot 10^{-13} m^{-1}$ och erhåller

$$\frac{r_1 - \Delta r}{2r_1} + \frac{r_1 - \Delta r}{r_1^2} \cdot \Delta r - C \cdot (r_1 - \Delta r) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r_1 - \Delta r}{2} + (r_1 - \Delta r) \cdot \Delta r - C \cdot r_1 \cdot (r_1 - \Delta r) = \frac{1}{2} r_1$$

$$(\Delta r)^2 - (\frac{r_1}{2} + C r_1^2)\Delta r + C r_1^3 = 0$$

$$\Delta r = \frac{r_1}{4} + \frac{C r_1^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_1}{4} + \frac{C r_1^2}{2}\right)^2 - C r_1^3}$$

Lösningen med plustecken måste förkastas eftersom det ger ett så stort värde på Δr att vår approximation av förändringen i potentiell energi inte längre är giltig. Med insatta värden får vi

Δr = 1644502,7-1644491,8 = 10,9 m. Med tanke på antalet värdesiffror i uppgiften borde vi svara att satelliten tappar 11 m i höjd på ett varv.

Alternativ lösning:
Förändringen i satellitens potentiella energi i tyngdkraftfältet är lika med arbetet som krävs för att lyfta satelliten en sträcka Δr, E_{P2} - E_{P1} = W. Den kraft som krävs för att lyfta satelliten i tyngdkraftfältet är lika stor som tyngdkraften men motriktad. Eftersom denna kraft inte är konstant måste vi integrera när vi beräknar arbetet.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{Mm_{sat}G}{r^2}dr = \left[-\frac{Mm_{sat}G}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Mm_{sat}G}{r_2} - \left(-\frac{Mm_{sat}G}{r_1}\right) = E_{p2} - E_{p1}$$

Om vi använder samma beteckningar som i första lösningsförslaget så har satelliten från början en radie, r_1. Enligt första lösningsförslaget är satellitens kinetiska energi $\frac{Mm_{sat}G}{2r_1}$ och vi har nyss sett att dess potentiella energi kan skrivas $-\frac{Mm_{sat}G}{r_1}$. Satellitens totala energi blir alltså $\frac{Mm_{sat}G}{2r_1} - \frac{Mm_{sat}G}{r_1} = -\frac{Mm_{sat}G}{2r_1}$. Efter ett varv har satellitens radie minskat med Δr och satellitens totala energi kan då skrivas som $-\frac{Mm_{sat}G}{2(r_1-\Delta r)}$. Enligt första lösningsförslaget tappar satelliten energin $\Delta E = -A \cdot M \cdot G \cdot \rho \cdot 2\pi$ på ett varv. Vi får då sambandet

$$-\frac{Mm_{sat}G}{2r_1} - A \cdot M \cdot G \cdot \rho \cdot 2\pi = -\frac{Mm_{sat}G}{2(r_1-\Delta r)}$$

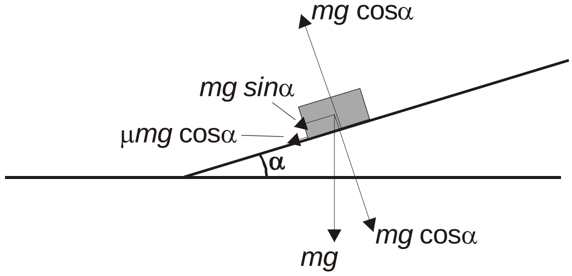
$$\frac{1}{(r_1-\Delta r)} - \frac{1}{r_1} = \frac{A \cdot \rho \cdot 4\pi}{m_{sat}}$$

$$\frac{r_1-(r_1-\Delta r)}{r_1 \cdot (r_1-\Delta r)} = \frac{A \cdot \rho \cdot 4\pi}{m_{sat}}$$

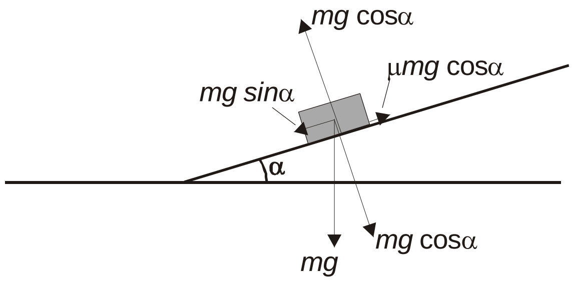
Vi antar att Δr är så litet att vi kan försumma det i jämförelse med r_1 i nämnaren. Vi erhåller slutligen $\Delta r = \frac{A \cdot \rho \cdot 4\pi \cdot r_1^2}{m_{sat}} = \frac{1{,}00 \cdot 5 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6{,}578 \cdot 10^6)^2}{250} m = 10{,}9 m$. Det var tydligen korrekt att försumma Δr i nämnaren.

3.

Under uppfarten gäller att tyngdkraften och friktionskraften samverkar vilket ger sambandet
$$-mg\sin\alpha - \mu\cdot mg\cos\alpha = ma_{\text{upp}} \quad \text{dvs} \quad a_{\text{upp}} = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$



Under nedfarten är tyngdkraftens komposant och friktionskraften motriktade vilket ger sambandet
$$-mg\sin\alpha + \mu\cdot mg\cos\alpha = ma_{\text{ned}} \quad \text{dvs} \quad a_{\text{ned}} = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$



Eftersom rörelserna är likformigt accelererade gäller
$$s = \frac{a_{\text{upp}}\cdot t_{\text{upp}}^2}{2} = \frac{a_{\text{ned}}\cdot t_{\text{ned}}^2}{2}$$
Enligt texten är
$$\mu = \frac{t_{\text{upp}}}{t_{\text{ned}}}$$
Enligt sambanden gäller då
$$\mu^2 = \frac{t_{\text{upp}}^2}{t_{\text{ned}}^2} = \frac{a_{\text{ned}}}{a_{\text{upp}}} = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$
$$\mu^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = \sin\alpha - \mu\cos\alpha$$
$$\sin\alpha(1-\mu^2) = \mu\cdot\cos\alpha(1+\mu^2)$$
$$\tan\alpha = \mu\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}$$

4.

a) Om gasen tillåts expandera under uppvärmning så uträttar den ett arbete på omgivningen. Det krävs energi både för att höja gasens inre energi och för arbetet som uträttas. Därför måste c_p vara större än c_V.

b) Värmekapacitiviteten beräknas som $\frac{\Delta E_{tot}}{\Delta T}$. Då volymen hålls konstant motsvarar den tillförda energin, ΔE_{tot}, ökningen i den ideala gasens inre energi, $\Delta E = \frac{3}{2} nR\Delta T$.

Vi får $c_V = \frac{3}{2} nR$.

Då trycket hålls konstant motsvarar den tillförda energin, ΔE_{tot}, summan av ökningen av den ideala gasens inre energi, $\Delta E = \frac{3}{2} nR\Delta T$, och det arbete, W, som gasen utför då den ökar sin volym. Gasen kommer att flytta locket (med area A) en sträcka s då gasen utvidgas. Vi får

$W = F \cdot s = p_0 \cdot A \cdot s = p_0 \cdot \Delta V = p_0 \cdot V_1 - p_0 \cdot V_0 = n \cdot R \cdot T_1 - n \cdot R \cdot T_0 = n \cdot R \cdot \Delta T$

$\Delta E_{tot} = \frac{3}{2} nR\Delta T + nR\Delta T = \frac{5}{2} nR\Delta T$ vilket ger $c_p = \frac{5}{2} nR$.

Detta ger $\frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}$.

5.

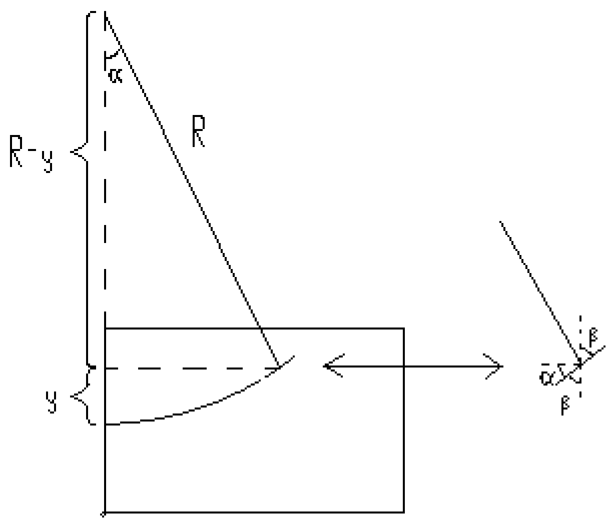
a) Vi kan tänka oss materialet uppdelat i många tunna skikt i y-led. I varje skikt antar vi ett konstant brytningsindex. Snells brytningslag ger

$n_1 \sin\beta_1 = n_2 \sin\beta_2 = n_3 \sin\beta_3$ osv

Ljuset kommer in i rät vinkel och brytningsindex är på detta ställe $n_0 = 1{,}30$. På en viss punkt längs strålens bana som definieras av vinkeln α enligt figur får vi relationen

$$n_0 \sin(90°) = n(y)\sin\beta(y) = n(y)\sin(90° - \alpha) = n(y)\cos(\alpha) = n(y)\frac{R-y}{R}$$

$$n(y) = n_0 \frac{R}{R-y}$$



b) Om strålen ska lämna den högra begränsningsytan med vinkeln 45° mot x-axeln gäller

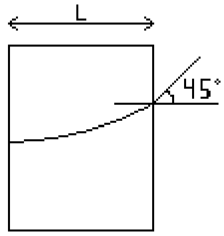
$$n(y)\sin(\alpha) = 1 \cdot \sin(45°)$$

$$\frac{n_0}{\cos(\alpha)}\sin(\alpha) = 1 \cdot \sin(45°)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(45°)}{1{,}3}$$

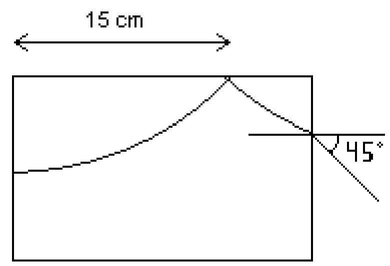
vilket ger α = 28,54°

L= *R* sin(α) = 25·0,478 cm = 11,9 cm



Om vi söker en stråle som går ut på ”ovansidan” med vinkeln 45º mot x-axeln får vi
$n_0 \sin(90^\circ) = 1{,}30 = n(y)\sin(\beta) = 1 \sin(\gamma)$,där γ är brytningsvinkeln mot normalen då strålen har passerat ut genom den övre ytan. Detta samband saknar lösning för γ. Vi får alltid en totalreflektion mot den övre ytan. Den andra lösningen vi söker måste uppkomma då strålen totalreflekteras mot övre ytan och sedan lämnar materialet genom den högra begränsningsytan. Strålen kommer då att lämna materialet snett neråt med vinkeln 45º mot x-axeln.

Strålen träffar övre ytan då y=5cm. Vi får $\cos(\alpha) = (25-5)/25$, dvs $\alpha=36{,}87^\circ$
Det motsvarar en längd i x-led på $R\cdot\sin 36{,}87^\circ = 15$ cm.
När strålen har totalreflekterats i den övre ytan kommer den återigen att följa en cirkelbana med samma radie men annat centrum. Banan kommer dock att bli en spegling av den första banan. Det innebär att banan har samma y-koordinat för x som för 15cm + 15cm-x.
Strålen kommer att träffa höger yta med infallsvinkel 28,54º då L = 15 + 15-11,9 cm = 18,1cm.



Anmärkning: Om vi förlänger materialet ytterligare kommer strålen att fortsätta följa en cirkelbana så att strålen tillslut vänder uppåt igen (se figur nedan). Det finns då en längd där strålen lämnar kristallen med vinkeln 45° snett uppåt. För ännu längre material kommer strålen att reflekteras en andra gång i ovansidan och vi erhåller lösningen ovan. Det finns alltså oändligt många längder som svarar mot att strålen lämnar materialet i 45° vinkel.