WALLENBERGS FYSIKPRIS

KVALIFICERINGS- OCH LAGTÄVLING
22 januari 2009

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. (a) Rörelsemotståndsarbetet på nervägen är

$$A_\mathrm{n} = F_\mathrm{motst} \cdot s = k \cdot mg \cdot s = k \cdot (2 \cdot 180 + 52 \cdot 100) \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 42 \cdot 10^3 \text{ J} = 2{,}29 \cdot k \text{ TJ}.$$

På uppvägen är motsvarande rörelsemotståndsarbete

$$A_\mathrm{u} = k \cdot (2 \cdot 180 + 52 \cdot 20) \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 42 \cdot 10^3 \text{ J} = 0{,}58 \cdot k \text{ TJ}.$$

(b) Förlorad lägesenergi på väg ner mot Narvik:

$$E_\mathrm{p,n} = mgh = (2 \cdot 180 + 52 \cdot 100) \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 520 \text{ J} = 0{,}0284 \text{ TJ}.$$

Tåget kan då mata in energimängden

$$E_\mathrm{n} = 0{,}88 \cdot (0{,}0284 - 2{,}29 \cdot k) \text{ TJ}$$

till elnätet. På uppvägen måste tågets lägesenergi öka med

$$E_\mathrm{p,u} = mgh = (2 \cdot 180 + 52 \cdot 20) \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 520 \text{ J} = 0{,}0071 \text{ TJ}.$$

Elektrisk energi som krävs på uppvägen är

$$E_\mathrm{u} = \frac{0{,}0071 + 0{,}58 \cdot k}{0{,}90} \text{ TJ}.$$

I artikeln står det att ett tåg på väg ner producerar ungefär lika mycket elektrisk energi som ett tåg på väg upp använder, det vill säga $E_\mathrm{n} = E_\mathrm{u}$, och vi får ekvationen

$$0{,}88 \cdot (0{,}0284 - 2{,}29 \cdot k) = \frac{0{,}0071 + 0{,}58 \cdot k}{0{,}90} \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}006$$

Svar: Rörelsemotståndet är 0,6 % av tyngden.

2. Flödet från kranen är

$$\frac{3{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{12 \text{ s}} = 2{,}75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vattnets hastighet (=flödet / tvärsnittsarean) uppe vid kranen respektive nere vid vaskens botten:

$$v_0 = \frac{2{,}75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi(4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = 0{,}55\ \mathrm{m/s},$$

$$v = \frac{2{,}75 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi(2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = 2{,}2\ \mathrm{m/s}.$$

Vattnets fart ökar alltså från 0,58 m/s till 2,3 m/s på en sträcka av 0,24 m. Accelerationen fås ur $2as = v^2 - v_0^2$ och blir (räknar med oavrundade värden)

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{2{,}2^2 - 0{,}55^2}{2 \cdot 0{,}24}\ \mathrm{m/s}^2 = 9{,}4\ \mathrm{m/s}^2.$$

Svar: $1 \cdot 10^1\ \mathrm{m/s}^2$ (eller $9\ \mathrm{m/s}^2$)

3. Beteckna effektutvecklingen i varje resistor med P och den uttagna strömmen från spänningskällan med I. Den totala effektutvecklingen i alla resistorerna är $6P$. Vi får då

$$6P = 72\ \mathrm{V} \cdot I \quad \Rightarrow \quad P = 12\ \mathrm{V} \cdot I.$$

För resistor A gäller att $P = U_\mathrm{A} \cdot I$. Eftersom $P = 12\ \mathrm{V} \cdot I$, fås att $U_\mathrm{A} = 12$ V. Spänningen över resistor B är då $U_\mathrm{B} = (72 - 12)\ \mathrm{V} = 60$ V. Effekten i vardera resistor, P, kan nu beräknas:

$$P = \frac{U_\mathrm{B}^2}{R_\mathrm{B}} = \frac{60^2}{100}\ \mathrm{W} = 36\ \mathrm{W}.$$

Strömmen från spänningskällan är

$$I = \frac{P}{U_\mathrm{A}} = \frac{36}{12}\ \mathrm{A} = 3{,}0\ \mathrm{A}.$$

Resisistansen i A är

$$R_\mathrm{A} = \frac{U}{I} = \frac{12}{3{,}0}\ \Omega = 4{,}0\ \Omega.$$

Strömmen genom B:

$$I_\mathrm{B} = \frac{U_\mathrm{B}}{R_\mathrm{B}} = \frac{60}{100}\ \mathrm{A} = 0{,}60\ \mathrm{A}.$$

Strömmen genom C är då $I_\mathrm{C} = (3{,}0 - 0{,}60)\ \mathrm{A} = 2{,}4$ A. Resistansen i C:

$$R_\mathrm{C} = \frac{P}{I_\mathrm{C}^2} = \frac{36}{2{,}4^2}\ \Omega = 6{,}25\ \Omega.$$

Spänningen över C är $U_\mathrm{C} = R_\mathrm{C} \cdot I_\mathrm{C} = 6{,}25 \cdot 2{,}4\ \mathrm{V} = 15$ V, och spänningen över F är då $U_\mathrm{F} = (60 - 15)\ \mathrm{V} = 45$ V. Resistansen i F:

$$R_\mathrm{F} = \frac{U_\mathrm{F}^2}{P} = \frac{45^2}{36}\ \Omega = 56{,}25\ \Omega.$$

Eftersom effektutvecklingen i D och E är lika, och eftersom det går samma ström i båda, måste spänningen över D och E vara lika,

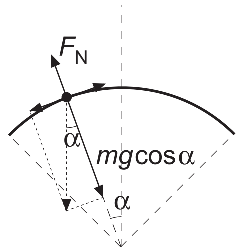
$$U_D = U_E = \frac{U_F}{2} = \frac{45}{2}\ \text{V} = 22{,}5\ \text{V}.$$

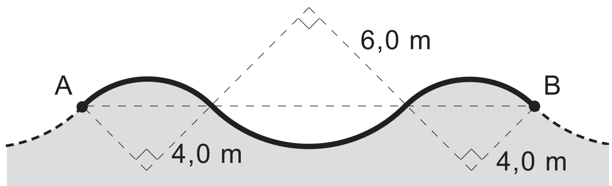
De har också samma resistans,

$$R_D = R_E = \frac{U_D^2}{P} = \frac{22{,}5^2}{36}\ \Omega = 14{,}0625\ \Omega.$$

Svar: Strömmen från spänningskällan är 3,0 A. Resistanserna är $R_A = 4{,}0\ \Omega$, $R_C = 6{,}3\ \Omega$, $R_D = 14\ \Omega$, $R_E = 14\ \Omega$ och $R_F = 56\ \Omega$.

4. Fall I: Cyklisten följer vägbanan från A till B utan att lätta. Betrakta cyklisten i en godtycklig punkt i första uppförsbacken. Kraftsituationen visas i figuren nedan.





Tyngdkraften har komposantuppdelats i en komposant riktad tangentiellt nedför banan och en riktad radiellt in mot centrum av banan. Storleken av den senare är $mg \cdot \cos\alpha$. Detta innebär att $mg \cdot \cos\alpha - F_N$ utgör centripetalkraft, och vi får

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cdot \cos\alpha - F_N.$$

Största möjliga hastighet erhålles då $F_N = 0$ vilket ger gränshastigheten

$$v = \sqrt{gr \cdot \cos\alpha}.$$

På vägen upp till toppen varierar α mellan 45° och 0°. Den tillåtna hastigheten om man skall ha kontakt med vägbanan varierar således mellan $\sqrt{9{,}82 \cdot 4{,}0 \cdot \cos 45^\circ}$ m/s $= 5{,}27$ m/s och $\sqrt{9{,}82 \cdot 4{,}0 \cdot \cos 0^\circ}$ m/s $= 6{,}27$ m/s. Cyklisten får alltså nöja sig med hastigheten 5,27 m/s. Vägens längd från A till B är

$$2 \cdot \frac{2\pi \cdot 4{,}0\ \text{m}}{4} + \frac{2\pi \cdot 6{,}0\ \text{m}}{4} = 22{,}0\ \text{m}.$$

och tiden blir $(22{,}0/5{,}27)$ s $= 4{,}17$ s.

Fall II: Cyklisten flyger från A till B. Det innebär att cyklistens bana kommer att beskrivas av en kaströrelse med uthoppsvinkel 45°. Låt t vara tiden tills cyklisten befinner sig i banans högsta punkt. En av rörelseformlerna i y-led ger

$$0 = v_0 \sin 45^\circ - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin 45^\circ}{g}.$$

I x-led gör cyklisten förflyttningen $s_x = (4{,}0 \cdot \sqrt{2} + 6{,}0 \cdot \sqrt{2} + 4{,}0 \cdot \sqrt{2})$ m $= 19{,}8$ m på tiden $2t$. Likformig rörelse i x-led ger

$$19{,}8 \text{ m} = v_0 \cos 45^\circ \cdot \frac{2\,v_0 \sin 45^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{9{,}82 \cdot 19{,}8} \text{ m/s} = 13{,}9 \text{ m/s},$$

där vi har utnyttjat att $2\cos 45^\circ \sin 45^\circ = \sin(2 \cdot 45^\circ) = 1$. Den totala flygtiden ($2t$, eftersom t är tiden till högsta läget) blir alltså

$$2t = \frac{s_x}{v_{0x}} = \frac{s_x}{v_0 \cos 45^\circ} = \frac{19{,}80}{13{,}9 \cdot \cos 45^\circ} \text{ s} = 2{,}01 \text{ s}.$$

Tidsvinsten blir $(4{,}17 - 2{,}01)$ s $= 2{,}2$ s.

Svar: Tidsvinsten är 2,2 s.

5. Vi uppskattar först hur mycket nettoenergi som lämnar klotet per sekund. Ur diagrammet fås att vid 150 °C, det vill säga då $T = 423\ K$, är

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{205 - 0}{145 \cdot 60 - 0} \text{ K/s} = 0{,}0236 \text{ K/s}.$$

Den avgivna nettoenergin per sekund blir

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = c \cdot m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} = 390 \cdot 2{,}32 \cdot 0{,}0236 \text{ W} = 21{,}3 \text{ W}.$$

Vi ställer sedan upp ett uttryck, med hjälp av Stefan-Boltzmanns lag, för den nettoutstrålade effekten. Vi behöver då veta klotets area. Klotets volym är $V = m/\rho = 2{,}32 \text{ kg}/(8{,}96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) = 2{,}59 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Radien är

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}59 \cdot 10^{-4}}{4\pi}} = 0{,}0395 \text{ m},$$

och arean är $A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 0{,}0395^2 \text{ m}^2 = 0{,}0196 \text{ m}^2$. Den nettoutstrålade effekten kan nu skrivas

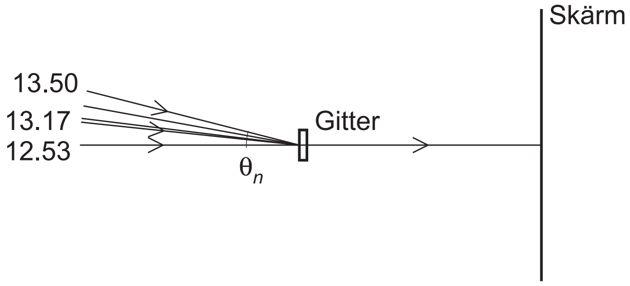
$$P = \varepsilon \cdot \sigma A\,(T^4 - T_0^4),$$

där ε är den sökta emissiviteten och T_0 omgivningens temperatur. Vi får

$$\varepsilon \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}0196 \cdot (423^4 - 293^4) = 21{,}3 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0{,}78.$$

Svar: 0,8.

6. Observationerna vid 13.17, 13.21 och 13.34 kan användas för att bestämma gitterkonstanten. Vanliga gitterekvationen ($d \sin \theta_n = n\lambda$) kan användas, men θ_n är nu infallsvinkeln. Klockan 13.17, då det gått 24 minuter sedan 12.53, har solen förflyttat sig vinkeln



$$\theta_n = \frac{24}{60} \cdot \frac{360^\circ}{24} = 6{,}0^\circ.$$

Om vi antar att det gula ljuset har våglängden $\lambda = 590$ nm, fås gitterkonstanten

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\theta_n} = \frac{1 \cdot 590 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\sin 6{,}0^\circ} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{m}.$$

Samma beräkningar ger för observationen klockan 13.21

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\theta_n} = \frac{1 \cdot 680 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\sin 7{,}0^\circ} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{m},$$

och för observationen klockan 13.34

$$d = \frac{n\lambda}{\sin\theta_n} = \frac{2 \cdot 520 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\sin 10{,}3^\circ} = 5{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{m}.$$

Medelvärdet blir $(5{,}6 + 5{,}6 + 5{,}8)/3 \cdot 10^{-6}$ m $= 5{,}7 \cdot 10^{-6}$ m. Klockan 13.50 har solen rört sig vinkeln

$$\theta_n = \frac{57}{60} \cdot \frac{360^\circ}{24} = 14{,}3^\circ.$$

Våglängden hos ljuset som nu syns vid markeringen fås ur gitterformeln,

$$\lambda = \frac{d\sin\theta_n}{n} = \frac{5{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{m} \cdot \sin 14{,}3^\circ}{n} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{m}}{n}.$$

Med $n = 2$ fås $\lambda = 700$ nm, det vill säga rött ljus, och med $n = 3$ fås $\lambda = 470$ nm, det vill säga blått. Förmodligen syns en lila färg vid markeringen (förutsatt att ljus i alla ordningar syns tydligt).

Svar: Lila.

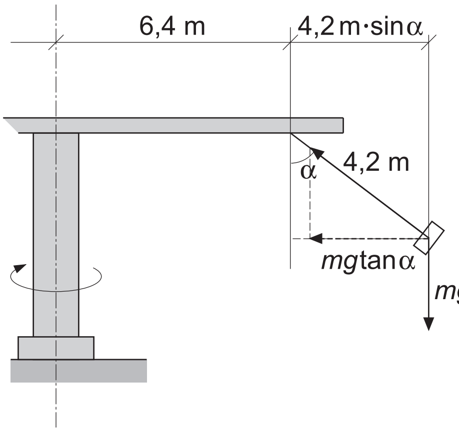
7. För att ta reda på vinkeln mellan vajern och flödeslinjerna och hur snabbt vajerns olika delar rör sig behöver vi först bestämma utslagsvinkeln α. Vi betraktar en slänggungåkare som antas vara punktformig och fäst i vajerns ände. Denna rör sig i en cirkelbana med radien $r = 6{,}4\ \text{m} + 4{,}2\ \text{m} \cdot \sin\alpha$. Storleken av den resulterande kraften kan skrivas $mg \cdot \tan\alpha$, och vi får

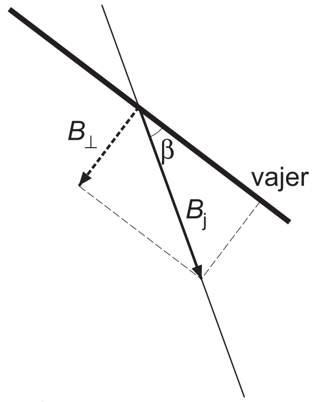
$$\frac{4\pi^2 rm}{T^2} = mg \cdot \tan\alpha.$$

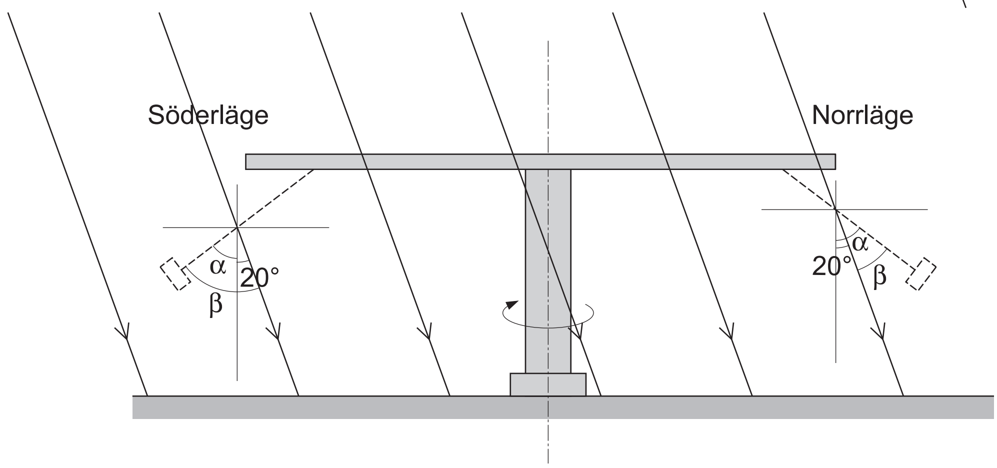
Insättning av $r = 6{,}4\ \mathrm{m} + 4{,}2\ \mathrm{m} \cdot \sin\alpha$ och $T = (60/11)\ \mathrm{s} = 5{,}45\ \mathrm{s}$ ger ekvationen (utan enheter utskrivna)

$$1{,}327 \cdot (6{,}4 + 4{,}2 \sin\alpha) = 9{,}82 \cdot \tan\alpha.$$

Numerisk lösning ger $\alpha = 0{,}921\ \mathrm{rad} = 52{,}8^\circ$.







Vajerns övre respektive undre ände rör sig således med farterna

$$v_1 = \frac{2\pi \cdot 6{,}4\ \mathrm{m}}{5{,}45\ \mathrm{s}} = 7{,}37\ \mathrm{m/s} \quad \text{respektive} \quad v_2 = \frac{2\pi \cdot (6{,}4 + 4{,}2 \sin 52{,}8^\circ)\ \mathrm{m}}{5{,}45\ \mathrm{s}} = 11{,}23\ \mathrm{m/s}.$$

Den i vajern inducerade spänningen ges av $e = lvB_\perp$, där $B_\perp$ är flödestäthetens komposant vinkelrätt mot vajern (och mot hastigheten). $B_\perp$ är som störst då gungan befinner sig i söderläge, och som minst i norrläge. I dessa lägen kan vi skriva $B_\perp = B_\mathrm{j} \sin\beta$, där β är vinkeln mellan vajern och jordmagnetiska flödestätheten, vars storlek är B_j, vilket ger

$$e = lvB_\mathrm{j} \sin\beta.$$

Hastigheten i vajern ökar linjärt, från 7,37 m/s till 11,23 m/s, så som värde på v kan vi använda den genomsnittliga hastigheten i vajern,

$$v = \frac{7{,}37 + 11{,}23}{2}\ \mathrm{m/s} = 9{,}30\ \mathrm{m/s}.$$

Den inducerade spänningen i söderläge är alltså

$$e_{\text{max}} = 4{,}2 \cdot 9{,}30 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(52{,}8^\circ + 20^\circ)\ \text{V} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{V}.$$

Den inducerade spänningen i norrläge är

$$e_{\text{min}} = 4{,}2 \cdot 9{,}30 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot \sin(52{,}8^\circ - 20^\circ)\ \text{V} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{V}.$$

(Alternativt kan den totala spänningen beräknas med integralen $e = \int_0^{4{,}2\,\text{m}} v(x) B_\perp \, \mathrm{d}x$.)

Svar: Mellan 1,1 mV och 1,9 mV.

8. Antag att protonen vänder då y-koordinaten är y_v. Då protonen flyttas till vändläget utförs arbetet qU, där U är spänningen mellan punkten där protonen vänder och den positiva plattan. Elektrisk energi omvandlas till rörelseenergi (i vändläget rör sig protonen endast i x-led):

$$qU = qEy_\text{v} = \frac{mv_x^2}{2}. \tag{1}$$

Kraften på protonen i x-led kan skrivas $F_x = qBv_y = qBy'$. Newtons andra lag i x-led ger

$$mv_x' = qBy'.$$

Om två derivator är lika måste funktionerna vara lika sånär som på en konstant. Vi får alltså

$$mv_x = qBy + C.$$

Konstanten C måste dock här vara 0, eftersom $v_x = 0$ i den tidpunkt då $y = 0$. Hastigheten i vändläget kan alltså skrivas

$$v_x = \frac{qBy_\text{v}}{m}. \tag{2}$$

Insättning av detta i ekvation (1) ger

$$qEy_\text{v} = \frac{mq^2B^2y_\text{v}^2}{2m^2} \quad \Rightarrow \quad y_\text{v} = \frac{2mE}{qB^2} = \frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}0 \cdot 10^6}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}50^2}\ \text{m} = 0{,}0835\ \text{m}.$$

Insättning i ekvation (2) ger hastigheten i vändläget,

$$v_x = \frac{qBy_\text{v}}{m} = \frac{qB}{m} \cdot \frac{2mE}{qB^2} = \frac{2E}{B} = \frac{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^6}{0{,}50} = 4{,}0 \cdot 10^6\ \text{m/s}.$$

Svar: Protonen kommer 8,3 cm i y-led innan den vänder. Hastigheten är då 4,0 Mm/s (i positiv x-riktning).