

## TEORETISKT PROBLEM 1

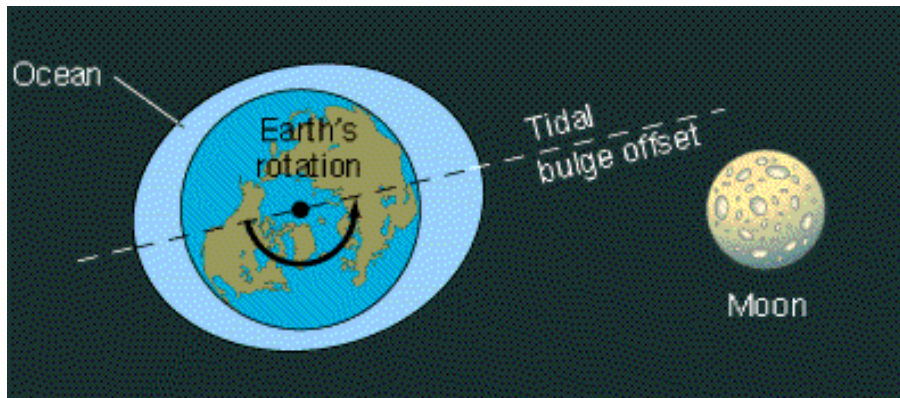
### UTVECKLINGEN AV SYSTEMET JORD-MÅNE

Avståndet mellan jorden och månen kan bestämmas med stor noggrannhet. Man gör detta genom att reflektera en laserstråle med speciella reflektorer (som placerades på månens yta av astronauter 1969) och mäta gångtiden för laserljuset (se figur 1).



Figur 1. En laserstråle som skickas ut från ett observatorium används för att noggrant mäta avståndet mellan jorden och månen.

Med sådana observationer har man direkt kunnat mäta att avståndet till månen långsamt ökar med tiden. Detta beror på att vridmoment från tidvattenskrafter överför rörelsemängdsmoment till månen, se figur 2. I detta problem skall du ta fram de grundläggande parametrarna för detta fenomen.



Figur 2. Månens dragningskraft ger tidvattensdeformationer eller "bulor" på jorden. På grund av jordens rotation är en linje som går genom "bulorna" inte i linje med en linje mellan jordens och månens centra. Denna avvikelse ger ett vridmoment som överför rörelsemängdsmoment från jordens rotation till månens banrörelse. Figuren är inte skalenlig.

## 1. Rörelsemängdsmomentets bevarande

Låt  $L_1$  vara det nuvarande totala rörelsemängdsmomentet för systemet jord-måne. Gör följande antaganden: a)  $L_1$  är summan av jordens rörelsemängdsmoment med avseende på jordaxeln och månens rörelsemängdsmoment i banrörelsen kring jorden. b) Månens bana är cirkulär och månen kan approximeras med en punkt. c) Jordens och månens rotationsaxlar är parallella. d) För att förenkla räkningarna antar vi att månens rotation sker kring jordens centrum och inte kring masscentrum. I hela problemet är alla tröghetsmoment, vridmoment och rörelsemängdsmoment tagna med avseende på en axel genom jordens centrum. e) Försumma inverkan från solen.

1a	Skriv ner ekvationen för det nuvarande totala rörelsemängdsmomentet för systemet jord-måne. Uttryck denna ekvation i $I_E$ , tröghetsmomentet för jorden; $\omega_{E1}$ , den nuvarande vinkelhastigheten för jordrotationen; $I_{M1}$ , det nuvarande tröghetsmomentet för månen med avseende på jordaxeln; och $\omega_{M1}$ , den nuvarande vinkelhastigheten för månen i sin bana.	0.2
----	--	-----

Denna överföringsprocess för rörelsemängdsmoment tar slut då perioden för jordrotationen och månens omloppstid kring jorden blir lika. Vid denna tidpunkt kommer tidvattenbulorna som månen alstrar att vara ens med en linje mellan månen och jorden och vridmomentet försvinner.

1b	Skriv ner ekvationen för det slutliga totala rörelsemängdsmomentet $L_2$ för systemet jord-måne. Gör samma antaganden som i fråga 1a. Uttryck denna ekvation i $I_E$ , jordens tröghetsmoment; $\omega_2$ , den slutliga vinkelhastigheten för jordrotationen och månens rörelse i sin bana; och $I_{M_2}$ , det slutliga tröghetsmomentet för månen.	0.2
----	---	-----

1c	Försumma bidraget från jordrotationen och skriv ner den ekvation som uttrycker rörelsemängdens bevarande i detta problem.	0.3
----	---	-----

## 2. Slutavstånd och slutlig vinkelhastighet för systemet jord-måne.

Anta att jämviktsekvationen för en cirkulär rörelse (månens rörelse kring jorden) gäller hela tiden. Försumma bidraget från jordens rotation i det slutliga rörelsemängdsmomentet.

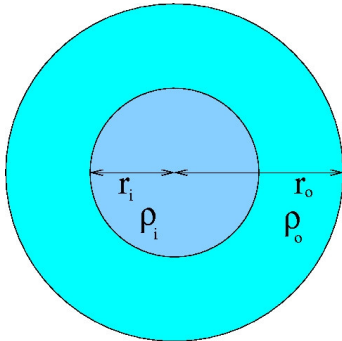
2a	Skriv ner jämviktsekvationen för den cirkulära rörelsen av månen kring jorden i sluttillståndet uttryckt i $M_E$ , $\omega_2$ , $G$ och slutavståndet $D_2$ mellan jorden och månen. $M_E$ jordens massa och $G$ är gravitationskonstanten.	0.2
----	---	-----

2b	Skriv ner ekvationen för slutavståndet $D_2$ mellan jorden och månen uttryckt i kända parametrar, $L_1$ , det totala rörelsemängdsmomentet för systemet, $M_E$ och $M_M$ , massorna respektive för jorden och månen samt $G$ .	0.5
----	--	-----

2c	Skriv ner ekvationen för den slutliga vinkelhastigheten $\omega_2$ för systemet jord-måne uttryckt i kända parametrar $L_1$ , $M_E$ , $M_M$ och $G$ .	0.5
----	---	-----

Nedan kommer du att bli ombedd att beräkna numeriska värden på  $D_2$  och  $\omega_2$ . Då kommer du att behöva veta jordens tröghetsmoment.

2d	Skriv ner ekvationen för jordens tröghetsmoment $I_E$ under antagandet att den är klotformig med en inre densitet $\rho_i$ från centrum ut till en radie $r_i$ , och en yttre densitet $\rho_o$ från denna radie ut till klotets yta som har radien $r_o$ (se figur 3).	0.5
----	---	-----



Figur 3. Jorden som ett klot med två densiteter,  $\rho_i$  och  $\rho_o$ .

Bestäm alltid numeriska värden som efterfrågas i detta problem med *två signifikanta siffror*.

2e	Beräkna tröghetsmomentet $I_E$ för jorden. Använd $\rho_i = 1,3 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ , $r_i = 3,5 \cdot 10^6 \text{ m}$ , $\rho_o = 4,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , and $r_o = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ .	0.2
----	---	-----

Jordens och månens massor är respektive  $M_E = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  och  $M_M = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ . Det nuvarande avståndet mellan jorden och månen är  $D_1 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ . Den nuvarande vinkelhastigheten för jordrotationen är  $\omega_{E1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Den nuvarande vinkelhastigheten för månens rörelse kring jorden är  $\omega_{M1} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , och gravitationskonstanten är  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

2f	Beräkna det numeriska värdet på det totala rörelsemängdsmomentet, $L_1$ för systemet.	0.2
----	---	-----

2g	Beräkna den slutliga vinkelhastigheten $D_2$ dels i meter och dels i enheter av det nuvarande avståndet $D_1$ .	0.3
----	---	-----

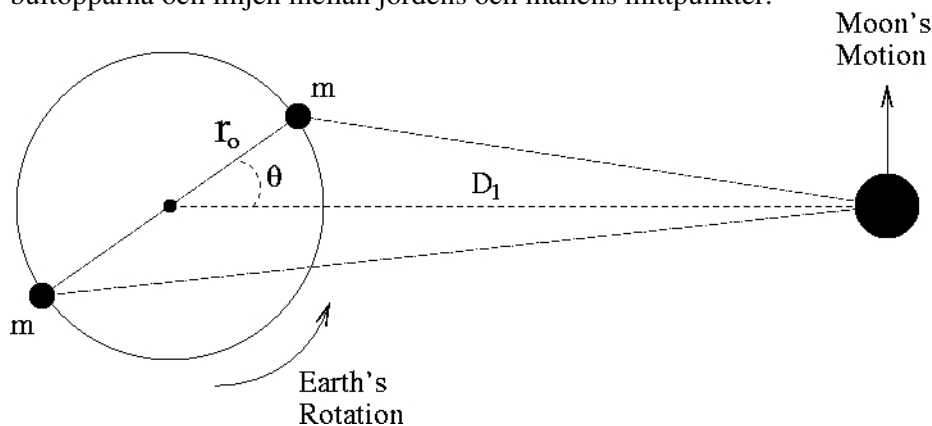
2h	Beräkna den slutliga vinkelhastigheten $\omega_2$ i $s^{-1}$ , och dessutom den slutliga dygnslängden i enheter av det nuvarande dygnet.	0.3
----	--	-----

Kontrollera antagandet att försumma jordrotationens bidrag till det slutliga rörelsemängdsmomentet genom att beräkna kvoten av det slutliga rörelsemängdsmomentet för jorden och månen. Detta bör bli ett litet värde.

2i	Beräkna kvoten av jordens slutliga rörelsemängdsmomentet och månens slutliga rörelsemängdsmoment.	0.2
----	---	-----

### 3. Hur långt avlägsnar sig månen per år?

Du skall nu ta reda på hur mycket månen avlägsnar sig från jorden varje år. För detta behöver vi veta ekvationen för vridmomentet som för närvarande verkar på månen. Antag att tidvattensbulorna kan approximeras av två punktmassor, vardera med massan  $m$ , på jordytan (se figur 4). Låt  $\theta$  vara vinkeln mellan den linje som förbinder bultopparna och linjen mellan jordens och månens mittpunkter.



Figur 4. Schematiskt diagram för att uppskatta vridmomentet på månen. Figuren är inte i skalenlig.

3a	Härled $F_c$ , storleken på den kraft med vilken den närmaste punktmassan påverkar månen.	0.4
----	---	-----

3b	Härled $F_f$ , storleken på den kraft med vilken den bortre sta punktmassan påverkar månen.	0.4
----	---	-----

Du kan nu beräkna motsvarande vridmoment som uppstår på grund av punktmassorna.

3c	Härled storleken på $\tau_c$ , det vridmoment som härrör från den närmaste punktmassan.	0.4
----	---	-----

3d	Härled storleken på $\tau_f$ , det vridmoment som härrör från den bortre sta punktmassan.	0.4
----	---	-----

3e	Härled storleken på det totala vridmomentet $\tau$ från bägge massorn. Eftersom $r_o \ll D_1$ bör du approximera ditt uttryck till lägsta signifikanta ordning i $r_o / D_1$ . Du kan använda att $(1 + x)^a \approx 1 + ax$ , om $x \ll 1$ .	1.0
----	---	-----

3f	Beräkna det numeriska värdet på det totala vridmomentet $\tau$ , med användande av att $\theta = 3^\circ$ och att $m = 3,6 \cdot 10^{16}$ kg (notera att denna massa är av storleksordningen $10^{-8}$ gånger jordens massa).	0.5
----	---	-----

Eftersom vridmoment är ändring av rörelsemängdsmoment per tid, ange den nuvarande ökningen av avståndet jorden-månen per år. Uttryck härvid månens rörelsemängdsmoment enbart med hjälp av  $M_M$ ,  $M_E$ ,  $D_1$  och  $G$ .

3g	Beräkna den nuvarande årliga ökningen av avståndet jorden-månen	1.0
----	---	-----

Uppskatta slutligen hur mycket dygnslängden ökar per dag årligen.

3h	Beräkna den årliga minskningen av $\omega_{E1}$ och hur mycket den nuvarande dygnslängden ökar per år.	1.0
----	--	-----

#### 4. Vart tar energin vägen?

I motsats till det totala rörelsemängdsmomentet, som är bevarat, är den totala energin (rotationsenergi plus gravitationsenergi) inte bevarad. Vi ska studera detta i sista avsnittet.

4a	Skriv ner en ekvation för den totala energin $E$ (rotationsenergi plus gravitationsenergi) för systemet jord-måne för närvarande. Uttryck denna ekvation i enbart $I_E$ , $\omega_{E1}$ , $M_M$ , $M_E$ , $D_1$ och $G$ .	0.4
----	---	-----

4b	Skriv ner en ekvation för ändringen $\Delta E$ av $E$ , som funktion av ändringarna i $D_1$ och i $\omega_{E1}$ . Beräkna ett numeriskt värde på $\Delta E$ under ett år med användande av värdena på ändringarna i $D_1$ och i $\omega_{E1}$ som du beräknade i frågorna 3g och 3h.	0.4
----	--	-----

Verifiera att denna energiförlust är i överensstämmelse med en uppskattning av den energi som förloras i form av värme på grund av tidvattnet som månen ger på jorden. Anta att tidvattnet lyfter med 0,5 m i medeltal, ett lager vatten med tjockleken  $h = 0,5$  m som täcker jordens yta (anta för enkelhets skull att hela jordens yta är täckt av vatten). Detta händer två gånger per dag. Anta vidare att 10% av denna gravitationella energi omvandlas till värme genom viskositet när vattnet sjunker tillbaka. Vattnets densitet är  $\rho_{water} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , och tyngdaccelerationen på jordytan är  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

4c	Hur stor är massan av detta ytlager av vatten?	0.2
----	--	-----

4d	Beräkna hur mycket energi som blir värme på ett år. Hur stämmer detta med den energi som förloras per år av systemet jord-måne för närvarande.	0.3
----	--	-----