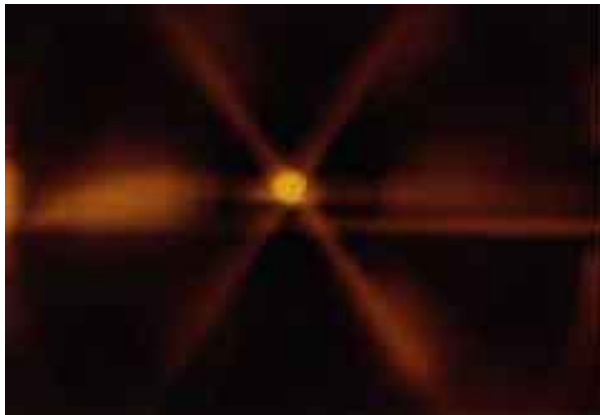


## TEORETISKT PROBLEM 2

### DOPPLERKYLNING MED LASER SAMT OPTISK SIRAP

Avsikten med detta problem är att ta fram en enkel teori för att förstå så kallad laserkyllning och ”optisk sirap”. Detta innebär att en stråle av neutrala atomer, vanligen alkaliatomer, kyls genom att bromsa dem med en laserstråle med en frekvens lika stor som en resonansfrekvens i atomen. För detta nobelprisbelönades S. Chu, P. Phillips och C. Cohen-Tannoudji år 1997.



Bilden ovan visar natriumatomer i en ”fälla” (ljus fläck i mitten) i skärningen mellan tre vinkelräta par av motriktade laserstrålar. Det område fällan omfattar kallas ”optisk sirap” eftersom de optiska krafterna liknar den inre (viskösa) friktionen för en kropp som rör sig i sirap.

I detta problem skall du analysera det grundläggande fenomenet av växelverkan mellan en foton som infaller mot en atom och grunderna för friktionsmekanismen (dissipation), men endast i en dimension.

#### DEL I: GRUNDERNA I LASERKYLNING.

Betrakta en atom med massan  $m$  som rör sig i positiva  $x$ -riktningen med hastigheten  $v$ . För enkelhets skull kommer vi att betrakta problemet endast i en dimension, vi försummar  $y$ - och  $z$ -riktningarna (se figur 1). Atomen har två energinivåer. Energin i den lägsta nivån antas vara noll och i den exciterade nivån  $\hbar\omega_0$  där  $\hbar = h/2\pi$ . Atomen är från början i den lägsta energinivån. En laserstråle med frekvensen  $\omega_L$  i laboratoriet infaller i den negativa  $x$ -riktningen mot atomen. Kvantmekaniskt består laserljuset av ett stort antal fotoner, var och en med energin  $\hbar\omega_L$  och rörelsemängd  $-\hbar k$ . En foton kan

absorberas av atomen och senare emitteras spontant; detta sker med lika stor sannolikhet i positiv som i negativ x-riktning. Eftersom atomen rör sig med icke-relativistisk fart,  $v/c \ll 1$  (där  $c$  är ljusfarten), betraktas bara fall där  $\hbar k / mv \ll 1$ , dvs att atomen har en rörelsemängd som är mycket större än en enskild fotons. När du skriver ner dina svar behåller du därför bara korrekationer upp till första ordningen i dopplereffekten.

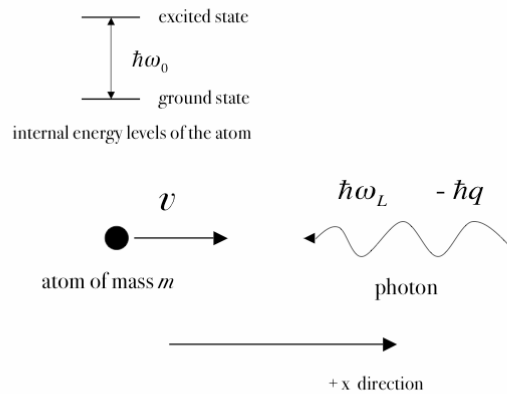


Fig.1 . Skiss av en atom med massan  $m$  och hastigheten  $v$  i x-riktningen som kolliderar med en foton med energi  $\hbar\omega_L$  och rörelsemängden  $-\hbar k$  . Atomen har två energinivåer med energiskillnad  $\hbar\omega_0$ .

Anta att laserljusets frekvens  $\omega_L$  är sådan att, sedd från atomen, är i resonans med övergången i atomen. Besvara följande frågor.

**1. Absorption.**

1a	Skriv ner resonansvillkoret för absorption av en foton.	0.2
----	---------------------------------------------------------	-----

1b	Skriv ner rörelsemängden $p_{at}$ för atomen efter absorptionen i laboratoriesystemet.	0.2
----	----------------------------------------------------------------------------------------	-----

1c	Skriv ner totala energin $\varepsilon_{at}$ för atomen efter absorptionen i laboratoriesystemet.	0.2
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## 2. Spontan emission av en foton i den negativa x-riktningen.

Någon tid efter absorptionen av den infallande fotonen, kan atomen emittera en foton i den negativa x-riktningen.

2a	Skriv ner energin $\varepsilon_{ph}$ på den emitterade fotonen efter emissionen i negativ x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

2b	Skriv ner rörelsemängden $p_{ph}$ på den emitterade fotonen i negativ x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

2c	Skriv ner rörelsemängden $p_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen i negativ x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

2d	Skriv ner totala energin $\varepsilon_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen i negativ x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## 3. Spontan emission av en foton i positiv x-riktning.

Någon tid efter absorptionen av den infallande fotonen, kan atomen emittera en foton i den positiva x-riktningen.

3a	Skriv ner energin $\varepsilon_{ph}$ på den emitterade fotonen efter emissionen i positiv x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

3b	Skriv ner rörelsemängden $p_{ph}$ på den emitterade fotonen i positiv x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

3c	Skriv ner rörelsemängden $p_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen i positiv x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

3d	Skriv ner totala energin $\varepsilon_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen i positiv x-riktning i laboratoriesystemet.	0.2
----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

#### 4. Emission i godtycklig riktning.

Den spontana emissionen av en foton i positiv eller negativ x-riktning sker med lika sannolikheter. Ta hänsyn till detta och besvara följande frågor:

4a	Skriv ner medelenergin $\varepsilon_{ph}$ på den emitterade fotonen.	0.2
----	----------------------------------------------------------------------	-----

4b	Skriv ner medelrörelsemängden $p_{ph}$ på den emitterade fotonen.	0.2
----	-------------------------------------------------------------------	-----

4c	Skriv ner medelenergin $\varepsilon_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen.	0.2
----	----------------------------------------------------------------------------------	-----

4d	Skriv ner medelrörelsemängden $p_{at}$ på atomen efter emissionen av fotonen.	0.2
----	-------------------------------------------------------------------------------	-----

#### 5. Överföring av energi och rörelsemängd.

Om man antar en en-foton absorption-emissionsprocess enligt ovan så får man en resulterande överföring i medeltal av rörelsemängd och energi mellan laserstrålningen och atomen.

5a	Skriv ner överföringen i medeltal i energi $\Delta\mathcal{E}$ till atomen efter en fullständig absorption-emissionsprocess.	0.2
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

5b	Skriv ner överföringen i medeltal av rörelsemängd $\Delta p$ till atomen efter en fullständig absorption-emissionsprocess.	0.2
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

### 6. Överföring av energi och rörelsemängd genom en laserstråle i den positiva x-riktningen.

Betrakta nu fallet att en laserstråle med frekvensen  $\omega'_L$  infaller mot atomen längs den positiva x-axeln medan atomen också rör sig i den positiva x-axeln med hastigheten  $v$ . Anta att man har ett resonansvillkor mellan övergången i atomen och laserstrålen och besvara följande frågor:

6a	Skriv ner ändringen $\Delta\mathcal{E}$ i medeltal av energin för atomen efter en fullständig en-foton absorption-emissionsprocess.	0.3
----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

6b	Skriv ner ändringen $\Delta p$ i medeltal av rörelsemängden för atomen efter en fullständig en-foton absorption-emissionsprocess.	0.3
----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

## DEL II: DISSIPATION OCH GRUNDERNA FÖR OPTISK SIRAP

Naturen påtvingar oss dock en inneboende obestämbarhet hos kvantprocesser. Det faktum att atomen spontant kan emittera en foton en *ändlig* tid efter absorption, gör därmed att resonansvillkoret inte behöver uppfyllas *exakt* som i diskussionen ovan. Frekvensen hos laserstrålarna  $\omega_L$  and  $\omega'_L$  kan ha godtyckliga värden och absorptions-emissions-processen kan likväl ske. Dessa kommer att hända med olika (kvant-sannolikheter), och som man borde vänta har sannolikheten maximum vid det exakta resonansvillkoret. Medelvärde av tider mellan en enskild absorptions- och emissionsprocess kallas livstiden för den exciterade energinivån hos atomen, och betecknas med  $\Gamma^{-1}$ .

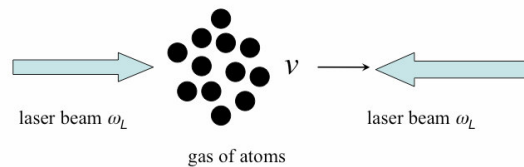
Betrakta en samling av  $N$  atomer i *vila* i laboratoriesystemet, och en mot dessa inkommande laserstråle med frekvens  $\omega_L$ . Atomerna absorberar och emitterar

kontinuerligt [fotoner], och så att det i medeltal finns  $N_{exc}$  atomer i det exciterade tillståndet (och därför  $N - N_{exc}$  atomer i grundtillståndet). En kvantmekanisk beräkning ger följande resultat:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

där  $\omega_0$  är resonansfrekvensen för den atomära övergången, och  $\Omega_R$  är den s.k. Rabi-frekvensen;  $\Omega_R^2$  är proportionell mot laserstrålens *intensitet*. Som sagts ovan, [kan man se] att detta tal är skilt från noll även om resonansfrekvensen  $\omega_0$  inte överensstämmer med laserstrålens frekvens  $\omega_L$ . Ett alternativt sätt att uttrycka ovanstående resultat är att antalet absorptions-emissions-processer per tidsenhet är  $N_{exc}\Gamma$ .

Betrakta den fysikaliska situation som visas i Figur 2, i vilken två motriktade laserstrålar med *samma* men *godtyckliga* frekvens  $\omega_L$  inkommer mot en gas med  $N$  atomer som rör sig med farten  $v$  i positiv x-riktning.



Figur 2. Två motriktade laserstrålar med *samma* men *godtyckliga* frekvens  $\omega_L$  inkommer mot en gas med  $N$  atomer som rör sig med farten  $v$  i positiva x-riktningen (atomstråle).

### 7. Kraften på en atomstråle från laserstrålarna.

7a	Med hjälp av den information vi har så långt, ange kraften som laserstrålarna påverkar atomstrålen med. Du bör anta att $mv \gg \hbar k$ .	1.5
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

### 8. Lågfartsgränsen.

Antag nu att atomernas fart är tillräckligt låg, så att du kan utveckla kraften till första ordningen i  $v$ .

8a	Ange ett uttryck för kraften som behandlades i uppgift (7a), i denna gräns.	1.5
----	-----------------------------------------------------------------------------	-----

Genom att använda detta resultat, kan du finna villkoren för acceleration, bromsning eller ingen effekt alls på atomerna från laserstrålarna.

8b	Skriv ned villkoret för att erhålla en positiv kraft (som accelererar atomerna).	0.25
----	----------------------------------------------------------------------------------	------

8c	Skriv ned villkoret för att kraften ska bli noll.	0.25
----	---------------------------------------------------	------

8d	Skriv ned villkoret för att erhålla en negativ kraft (som bromsar atomerna).	0.25
----	------------------------------------------------------------------------------	------

8e	Betrakta nu fallet att atomerna rör sig med hastigheten $-v$ (i negativa $x$ -riktningen). Skriv ned ett villkor för att erhålla en bromsande kraft på atomerna.	0.25
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------

### 9. Optisk sirap.

I fallet negativ kraft får man en dissipativ friktionskraft. Antag att atomgasen initialt, vid  $t=0$ , har hastigheten  $v_0$ .

9a	I gränsen av låga farter, bestäm atomernas hastighet efter det att laserstrålarna varit påslagna under en tid $\tau$ .	1.5
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

9b	Antag nu att atomgasen är i termisk jämvikt vid temperatur $T_0$ . Bestäm temperaturen $T$ efter det att laserstrålarna varit på under en tid $\tau$ .	0.5
----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Denna modell är inte giltig vid alltför låga temperaturer.