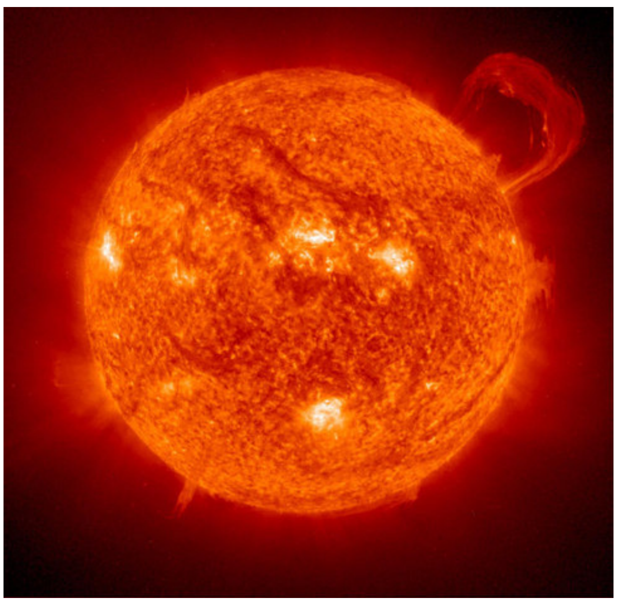
TEORETISKT PROBLEM 3

VARFÖR ÄR STJÄRNOR SÅ STORA?

Stjärnorna är klot av het gas. Flertalet lyser eftersom de fusionerar väte till helium i sina centrala delar. I detta problem kommer vi att använda begrepp från både klassisk mekanik och kvantmekanik, samt från elektrostatik och termodynamik för att förstå varför stjärnor måste vara tillräckligt stora för att kunna uppnå denna fusionsprocess. Vi kommer också att härleda det som borde vara den minsta massan och radien för att en stjärna skall kunna fusionera väte.



Figur 1. Vår sol, liksom flertalet stjärnor, lyser som ett resultat av termonukleär fusion av väte till helium.

ANVÄNDBARA KONSTANTER

Gravitationskonstanten = $G = 6.7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^2

Boltzmanns konstant = $k = 1.4\times10^{-23}$ J K^{-1}

Plancks konstant = $h = 6.6\times10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}

Protonmassan = $m_p = 1.7\times10^{-27}$ kg

Elektronmassan = $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg

Elektriska enhetsladdningen = $q = 1.6\times10^{-19}$ C

Permittiviteten i vakuum = $\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Solens radie = $R_S = 7.0\times10^{8}$ m

Solens massa = $M_S = 2.0\times10^{30}$ kg

1. En klassisk uppskattning av temperaturen i centrum av stjärnorna.

Anta att gasen i stjärnan är ren joniserad vätgas (elektroner och protoner i lika antal) och att den uppför sig som en ideal gas. Från klassisk synpunkt behöver atomkärnorna komma så nära som 10^{-15} m för att de starka kärnkrafterna, som har kort räckvidd, skall dominera och kärnorna fusionera. För att göra detta måste de först övervinna den repulsiva Coulombkraften. Anta klassiskt att de två protonerna (betraktade som punktladdningar) rör sig i motsatt riktning, var och en med farten v_{rms}, roten ur den kvadratiska medelfarten (rms), i en endimensionell frontalkollision.

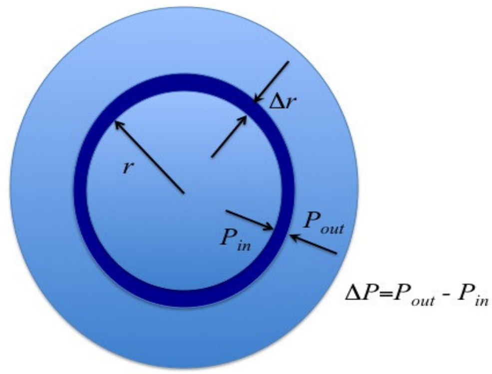
1a	Vilken temperatur, T_c, måste gasen ha för att det kortaste avståndet, d_c, skall vara 10^{-15} m? Ange detta och alla numeriska värden i detta problem med upp till två signifikanta siffror.	1.5

2. Där du finner att den så bestämda temperaturen är felaktig

För att kontrollera att den tidigare erhållna temperaturen är rimlig måste man ha ett oberoende sätt att uppskatta centraltemperaturen i en stjärna. Stjärnornas inre struktur är mycket komplicerad men vi kan få tillräcklig förståelse genom att göra några antaganden. Stjärnor är i jämvikt, dvs de varken utvidgas eller drar ihop sig eftersom gravitationskraften balanseras av den utåtriktade tryckkraften (se figur 2). För ett sfäriskt skikt gas ges den hydrostatiska jämviktsekvationen av

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

där P är gasens tryck, G gravitationskonstanten, massan M_r på stjärnan innanför radien r, och ρ_r är densiteten på gasen i skiktet.



Figur 2. Stjärnorna är i hydrostatisk jämvikt, med tryckskillnaden balanserad av tyngdkraften.

En uppskattning av storleksordningen av centraltemperaturen i stjärnan kan erhållas med värden på parametrarna i centrum och på ytan av stjärnan genom följande approximationer:

$$\Delta P \approx P_o - P_c ,$$

där P_c och P_o är trycken i centrum och på ytan av stjärnan, respektive.
Eftersom $P_c >> P_o$, kan vi anta att

$$\Delta P \approx - P_c .$$

Med samma approximation kan vi skriva

$$\Delta r \approx R ,$$

där R är hela radien på stjärnan och

$$M_r \approx M_R = M ,$$

med M stjärnans hela massa.

Densiteten kan approximeras med värdet i centrum,

$$\rho_r \approx \rho_c .$$

Du kan anta att trycket är som i en ideal gas.

2a	Ange en ekvation för temperaturen, T_c, i stjärnans centrum uttryckt endast i stjärnans radie och massa samt fysikaliska konstanter.	0.5

Vi kan nu använda följande förutsägelse av denna model som ett kriterium för hur bra modellen är:

2b	Använd ekvationen från (2a) och skriv ner den förväntade kvoten M/R för en stjärna, uttryckt endast i fysikaliska konstanter och T_c.	0.5

2c	Använd värdet på T_c härlett i del (1a) och beräkna det numeriska värdet på kvoten M/R som man kan vänta sig för en stjärna.	0.5

2d	Beräkna sedan kvoten M_{sol}/R_{sol}, och kontrollera att detta värde är mycket större än det du fann i (2c).	0.5

3. En kvantmekanisk bestämning av centraltemperaturen i stjärnorna.

Den stora skillnaden du fann i (2d) antyder att den klassiska uppskattningen av T_c som du fick i (1a) inte är korrekt. Lösningen på denna skillnad finner vi när vi betraktar kvantmekaniska effekter, som säger oss att protonerna uppför sig som vågor och att enskilda protoner är "utsmetade" i ett område av storleksordning λ_p, de Broglie-våglängden. Detta medför att om d_c, minsta avståndet mellan protonerna, är av storleksordningen λ_p, så är protonerna i kvantmekanisk mening överlappande och kan fusionera.

3a	Anta att $d_c = \dfrac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ är villkoret som tillåter fusion för en proton med farten v_{rms}, och härled en ekvation för T_c uttryckt i endast fysikaliska konstanter.	1.0

3b	Beräkna numeriskt värdet på T_c erhållet i (3a).	0.5

3c	Använd värdet på T_c från (3b) för att beräkna ett numeriskt värde på kvoten M/R som man förväntar sig för en stjärna genom att använda formeln härledd i (2b). Kontrollera att detta värde är mycket nära den observerade kvoten M_{sol}/R_{sol}.	0.5

Det är faktiskt så att stjärnor i den så kallade *huvudserien* (som fusionerar väte) approximativt följer denna kvot inom ett stort massintervall.

4. Massa/radie-kvoten för stjärnorna.

Överenstämmelsen ovan antyder att den kvantmekaniska modellen för att uppskatta centraltemperaturen i solen är korrekt.

4a	Använd de tidigare resultaten för att visa, att för en stjärna som fusionerar väte är kvoten av massan genom radien densamma, och beror bara på fysikaliska konstanter. Finn en ekvation för kvoten M / R för stjärnor som fusionerar väte.	0.5

5. Mass/radie-förhållande för små stjärnor.

Resultaten från (4a) indikerar att det kan finnas stjärnor med godtycklig massa, så länge som ett sådant villkor är uppfyllt; detta är dock inte sant.

Gasen i normala stjärnor som fusionerar väte uppför sig approximativt som en ideal gas. Detta betyder att d_e, den typiska separationen *mellan elektroner,* i medeltal är större än λ_e, deras typiska de Broglie-våglängd. Om de vore närmare skulle elektronerna befinna sig i ett s.k. urartat tillstånd, och stjärnorna skulle uppföra sig annorlunda. Lägg märke till skillnaden i hur vi behandlar protoner och elektroner i stjärnan. För protoner skall deras de Broglie-våglängder överlappa då de kolliderar för att slås samman, medan för elektronerna så skall deras de Broglie-våglängder inte överlappa för att de ska förbli en ideal gas.

Densiteten i stjärnor ökar med minskande avstånd till centrum. Anta trots detta i denna storleksordnings-uppskattning att de har homogen densitet. Du får vidare använda att $m_p >> m_e$.

5a	Bestäm en ekvation för n_e, den genomsnittliga antalstätheten av elektroner i en stjärna.	0.5

5b	Bestäm en ekvation för d_e, den typiska separationen mellan elektroner i stjärnan.	0.5

5c	Använd villkoret $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ för att skriva ned en ekvation för radien hos den minsta möjliga normala stjärnan. Tag temperaturen i centrum av stjärnan som typisk för stjärnans hela inre.	1.5

5d	Beräkna det numeriska värdet på radien för den minsta möjliga normala stjärnan, både i meter och i enheter av solradien.	0.5

5e	Beräkna det numeriska värdet på massan för den minsta möjliga normala stjärnan, både i kg och i enheter av solmassan.	0.5

6. Fusion av helium i äldre stjärnor.

Allteftersom stjärnor åldras, kommer de att ha fusionerat det mesta vätet i sin kärna till helium (He), så att de tvingas börja fusionera helium till tyngre grundämnen för att kunna fortsätta lysa. En heliumkärna har två protoner och två neutroner, så den har dubbla laddningen och cirka fyra gånger massan för en proton. Vi såg tidigare att $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ är villkoret för protoner att fusionera.

6a	Sätt upp motsvarande villkor för heliumkärnan och finn $v_{rms}(He)$ rms-farten hos heliumkärnan, och $T(He)$ den temperatur som krävs för heliumfusion.	0.5