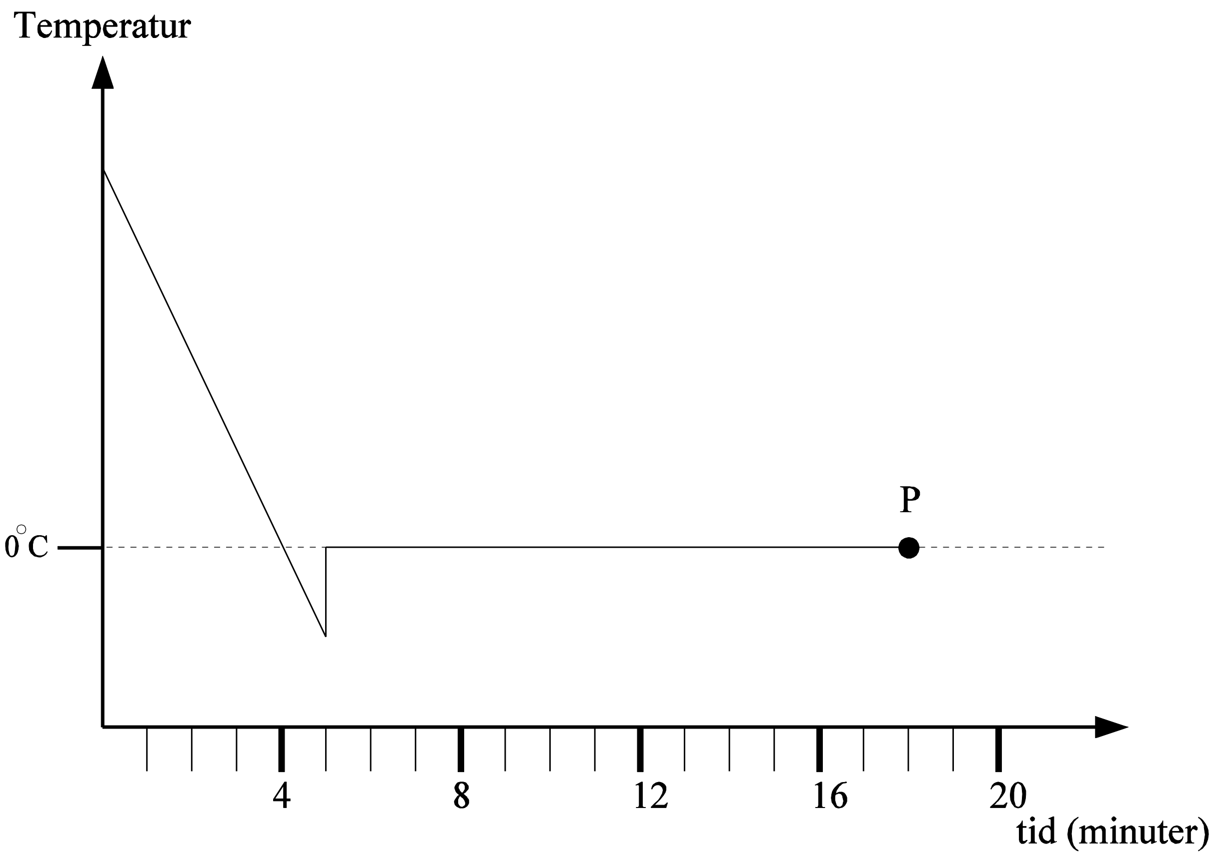
# Final i Wallenbergs Fysikpris

## 26-27 mars 2010. Teoriprov Lösningsförslag

1.




a)
Vattens värmekapacitivitet: $c_P^{\text{va}} = 4{,}19 \cdot 10^3\ \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
Isens värmekapacitivitet: $c_P^{\text{is}} = 2{,}2 \cdot 10^3\ \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
Smältvärmet: $L = 333 \cdot 10^3\ \text{Jkg}^{-1}$
Kylmaskinen drivs med spänningen $U = 220\ \text{V}$ och strömmen $I = 0{,}5\ \text{A}$.
Kylmaskinens verkningsgrad är $\epsilon = 0{,}70$.
Maskinens kylande effekt: $P = U \cdot I \cdot \epsilon = 220 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}70 = 77\ \text{W}$.

Den energi som bortförs från tidpunkten 4,0 min till tidpunkten 18,0 min motsvarar smältvärmet för att frysa allt vatten till is.
Den tid det tar för att frysa allt vatten är $\Delta t = (18{,}0 - 4{,}0)\ \text{min} = 840\ \text{s}$.
Den värme som bortförs under denna tid, $P \cdot \Delta t$, motsvarar $L \cdot m$, där $m$ är vattnets massa. Denna massa ges då av $m = \frac{U \cdot I \cdot \epsilon \cdot \Delta t}{L} = \frac{220 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}70 \cdot 840}{333 \cdot 10^3} = 0{,}194\ \text{kg}$.

Vattnet underkyls under tiden $\Delta t_1 = 1{,}0\ \text{min} = 60\ \text{s}$. Värmen som bortförs under denna tid, $P \cdot \Delta t_1$, motsvarar den värme $c_P^{\text{va}} \cdot m \cdot \Delta T_1$, som måste bortföras för att sänka vattnets temperatur med $\Delta T_1$.
Den lägsta underkylda temperaturen ges av $\Delta T_1 = \frac{-U \cdot I \cdot \epsilon \cdot \Delta t_1}{c_P^{\text{va}} \cdot m} = \frac{-220 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}70 \cdot 60}{4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 0{,}194} = -5{,}7\ ^\circ\text{C}$

**Svar:** Det finns 0,19 kg vatten i behållaren och vattnet underkyldes till $-5{,}7\ ^\circ\text{C}$ innan det började frysa till is.

b)
Vid tidpunkten 19,0 minuter har det gått $\Delta t_3 = 1{,}0$ minuter sedan allt vatten frusit till is. Värmen som bortförs under denna tid $P \cdot \Delta t_3$, motsvarar den värme, $c_P^{\text{is}} \cdot m \cdot \Delta T_2$, som måste bortföras för att sänka isens temperatur med $\Delta T_2$. Temperaturen vid 19,0 minuter blir då $\Delta T_2 = \frac{-U \cdot I \cdot \epsilon \cdot \Delta t_3}{c_P^{\text{is}} \cdot m} = \frac{-220 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}70 \cdot 60}{2{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}194} = -10{,}8\ ^\circ\text{C}$

**Svar:** Vid tidpunkten 19 minuter har temperaturen sjunkit till $-10{,}8\ ^\circ\text{C}$.

2.

a) Enligt problemtexten kan luftmotståndskraften, $F_l$, approximeras med

$$F_l = k \cdot A \cdot v^2 \qquad (1)$$

där $k$ är en konstant som beror på luftens densitet och föremålets form, $A$ är objektets tvärsnittsarea samt $v$ är luftens fart relativt cyklisten. För att hålla konstant hastighet måste cyklisten utöva en kraft framåt som är lika stor som luftmotståndskraften i ekvation (1) där $v$ är cykelns fart om det är vindstilla. På tiden $\Delta t$ rör sig cyklisten sträckan $v \cdot \Delta t$ och uträttar ett arbete $F_l \cdot v \cdot \Delta t$. Den effekt som cyklisten utvecklar blir då

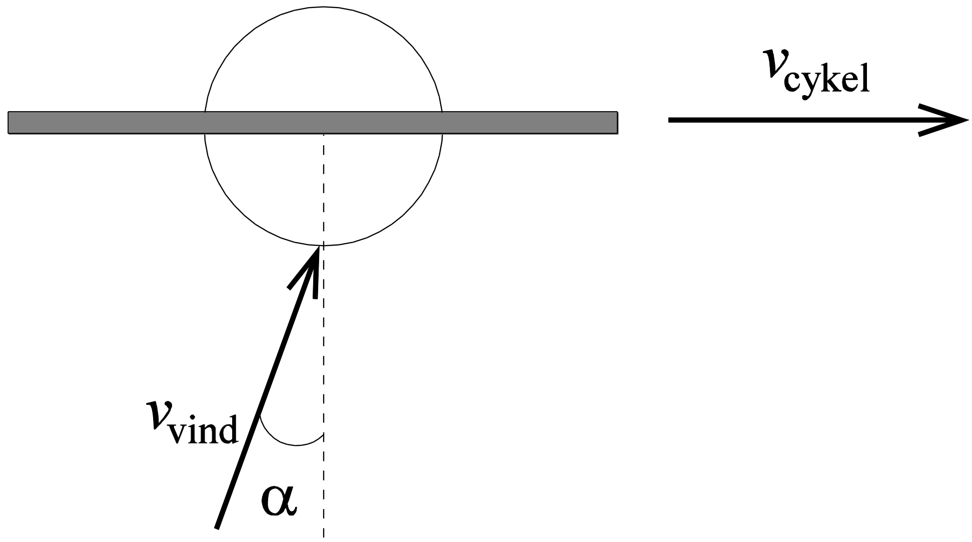
$$P(v) = \frac{F_l \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = F_l \cdot v = k \cdot A \cdot v^2 \cdot v$$

Om hastigheten ökar till det dubbla får vi

$$P(2v) = F_l \cdot 2v = k \cdot A \cdot (2v)^2 \cdot 2v = 8k \cdot A \cdot v^2 \cdot v,$$

vilket innebär att effekten blir 8 ggr större.

b) Enligt problemtexten är cykelns fart, $v_{\text{cykel}}$, lika stor som vindens fart, $v_{\text{vind.}}$. I figuren visas riktningarna för cykelns hastighet och vindens hastighet.




*Bilden visar schematiskt en cykel sett uppifrån (den grå linjen). Cirkeln är cyklisten.*

I problemtexten får vi veta att kraftkomposanten i x-riktningen (cykelns färdriktning) ges av

$$F_x = F_l \frac{v_x}{v} = kAv^2 \frac{v_x}{v} = kAv \cdot v_x, \qquad (2)$$

där alla hastigheter är relativa hastigheter mellan cykel och luft.

Vi behöver vindens hastighet relativt cykeln och måste därför vektoriellt addera vindens hastighet relativt marken och markens hastighet relativt cykeln.

I x-led får vi $v_x = v_{\text{cykel}} - v_{\text{vind}} \sin\alpha = v_{\text{cykel}}(1 - \sin\alpha)$ där vi utnyttjat att $v_{\text{vind}} = v_{\text{cykel}}$ och i y-led får vi $v_y = v_{\text{vind}} \cos\alpha = v_{\text{cykel}} \cos\alpha$.

Vi behöver också storleken på den relativa vindhastigheten, $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_{\text{cykel}}\sqrt{(2 - 2\sin\alpha)}$. Vi sätter in dessa samband i ekvation (2):

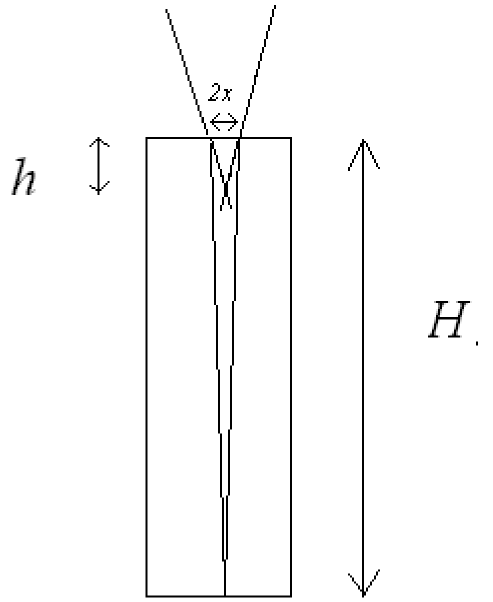
$$F_x = kAv_{\text{cykel}}\sqrt{(2 - 2\sin\alpha)} \cdot v_{\text{cykel}}(1 - \sin\alpha) \qquad (3)$$

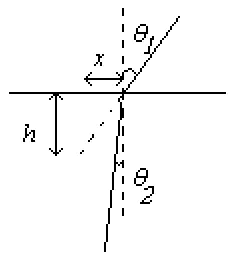
Vid vindstilla kan vi sätta $v = v_{\text{cykel}}$ i ekvation (1) och vi får $F_x = kAv_{\text{cykel}}^2$
Då vi har vind ger ekvation (3) att $F_x = kAv_{\text{cykel}}^2\sqrt{2}(1 - \sin\alpha)^{3/2}$
Kraftkomposanten från luftmotståndet i färdriktningen är lika stor som om det vore vindstilla om $\sqrt{2}(1 - \sin\alpha)^{3/2} = 1$

$$(1 - \sin\alpha)^{3/2} = 1/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (1 - \sin\alpha) = 1/\sqrt[3]{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 0{,}206 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 11{,}9°$$

**Svar:** Vi får samma luftmotstånd som vid vindstilla om vinden kommer med vinkeln 11,9° snett bakifrån.

3.
a)
I figuren nedan till vänster visas hur två strålar från en punkt på hjärtat bryts i den övre ytan på glasstaven. Efter att strålarna har brutits verkar de komma från en punkt på avståndet h under den övre ytan. Glasstavens höjd, H, är 25,0 cm och dess brytningsindex, $n_2$, är 1,55.




Brytningen vid gränsytan följer Snells lag: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ där $n_1$ är luftens brytningsindex och vinklarna definieras i figuren ovan. Ur figuren kan man också se att $\tan\theta_1 = \frac{x}{h}$ och $\tan\theta_2 = \frac{x}{H}$. Bilden ska betraktas rakt uppifrån och alla vinklar är därför väldigt små. För små vinklar gäller $\sin\theta \approx \tan\theta$ och Snells lag kan skrivas $n_1 \tan\theta_1 = n_2 \tan\theta_2$. Vi ersätter tan med uttrycken ovan och får $\frac{n_1 \cdot x}{h} = \frac{n_2 \cdot x}{H}$. Detta ger att $h = \frac{n_1 \cdot H}{n_2} = \frac{1 \cdot 25{,}0\ \text{cm}}{1{,}55} = 16{,}1\ \text{cm}$.

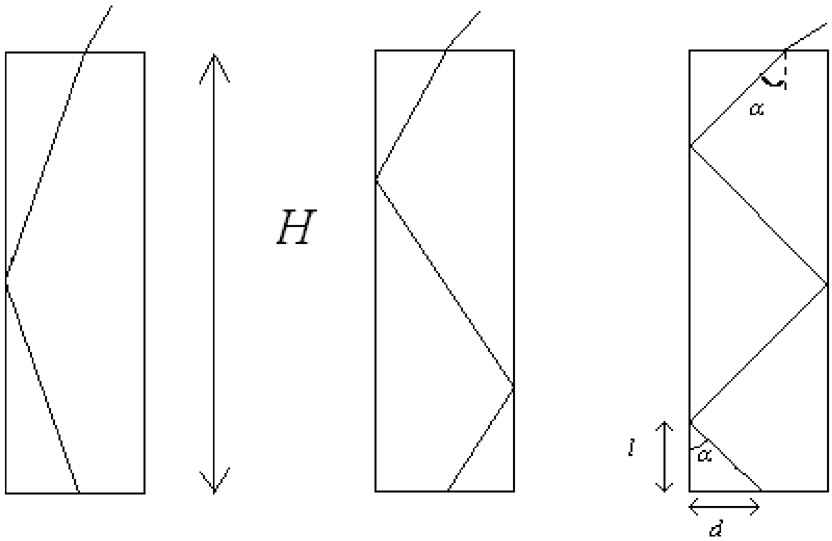
Alternativ lösning:

Antag ett litet värde på $x$, t.ex. $x$=0,1 cm. Detta ger $\theta_2 = \tan^{-1}\frac{x}{H} = \tan^{-1}\frac{0{,}1}{25} = 0{,}229^\circ$. Snells lag ger $\sin\theta_1 = 1{,}55 \cdot \sin 0{,}229^\circ$ och vi får att $\theta_1 = 0{,}355^\circ$. Den sökta sträckan, $h$, kan nu beräknas enligt $h = \frac{x}{\tan\theta_1} = \frac{0{,}1\ \text{cm}}{\tan 0{,}355^\circ} = 16{,}1\ \text{cm}$. För att vara säker på att x var tillräckligt litet provar vi även med $x$=0,01 cm vilket visar sig ge samma svar.

**Svar:** Hjärtat verkar befinna sig 16 cm under glasstavens övre yta.

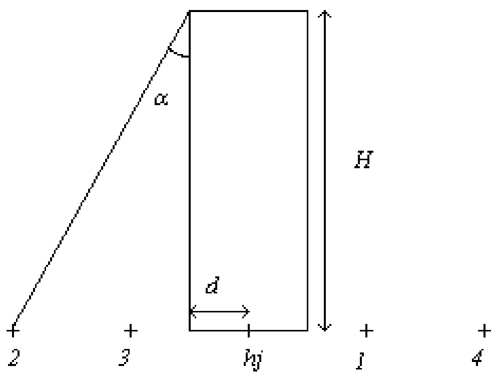
b)
Ljusstrålar från hjärtat i botten på staven kommer att reflekteras i glasstavens långsidor. Reflektionerna blir starkast om strålen träffar sidan med en infallsvinkel som är större än gränsvinkeln för totalreflektion. För varje gång strålen speglas på vägen upp genom glasstaven får vi en ny spegelbild (se figur nedan). Ju fler reflektioner desto större infallsvinkel då strålen träffar den övre ytan.

Infallsvinkeln, α, får inte bli större än gränsvinkeln för totalreflektion om strålen ska kunna komma ut ur glasstaven. Denna vinkel kan också återfinnas vid den första reflektionen som strålen gör med en sidoyta.




Med beteckningar ur figuren får vi $\tan\alpha = \frac{d}{l}$ vilket ger $l = \frac{d}{\tan\alpha}$. Kortsidan på glasstaven är 5,0 cm, dvs. 2*d* = 5,0 cm. För att strålen ska hinna reflekteras en gång måste $H > l$. För att strålen ska hinna reflekteras två gånger måste $H > 3l$ För att strålen ska hinna reflekteras m gånger måste $H > (2m-1)l$. För att bestämma maximalt antal reflektioner sätter vi in det minsta möjliga värdet på *l* och undersöker hur stort m kan bli. Det minsta möjliga värdet på *l* erhålls med största möjliga värde på α som är gränsvinkeln för totalreflektion. Gränsen för totalreflektion ges av $n_1 \sin\theta_{tr} = 1$. Vi får $\theta_{tr} = \sin^{-1}\frac{1}{n_1} = 40{,}2°$. För att beräkna minsta värdet på l sätter vi $\alpha = \theta_{tr}$ och får $l_{\min} = \frac{d}{\tan\theta_{tr}} = \frac{2{,}5\text{ cm}}{\tan 40{,}2^\circ} = 2{,}96\text{ cm}$. Vi får $2m - 1 < \frac{H}{l_{\min}}$ vilket ger att $m < \frac{H}{2l_{\min}} + \frac{1}{2} = \frac{25}{2\cdot 2{,}96} + \frac{1}{2} = 4{,}7$.

Alternativ lösning:




Vi kan som en alternativ lösning studera var spegelbilderna av hjärtat ligger. När hjärtat (hj) reflekteras i stavens högra sidoyta får vi en spegelbild makerad med *1* i figuren ovan. Denna spegelbild reflekteras i sin tur i den vänstra ytan vilket ger spegelbilden markerad med *2*. Om hjärtat först reflekteras i den vänstra ytan får vi spegelbild *3*. Denna spegelbild reflekteras sedan i den högra ytan vilket ger spegelbild *4*.

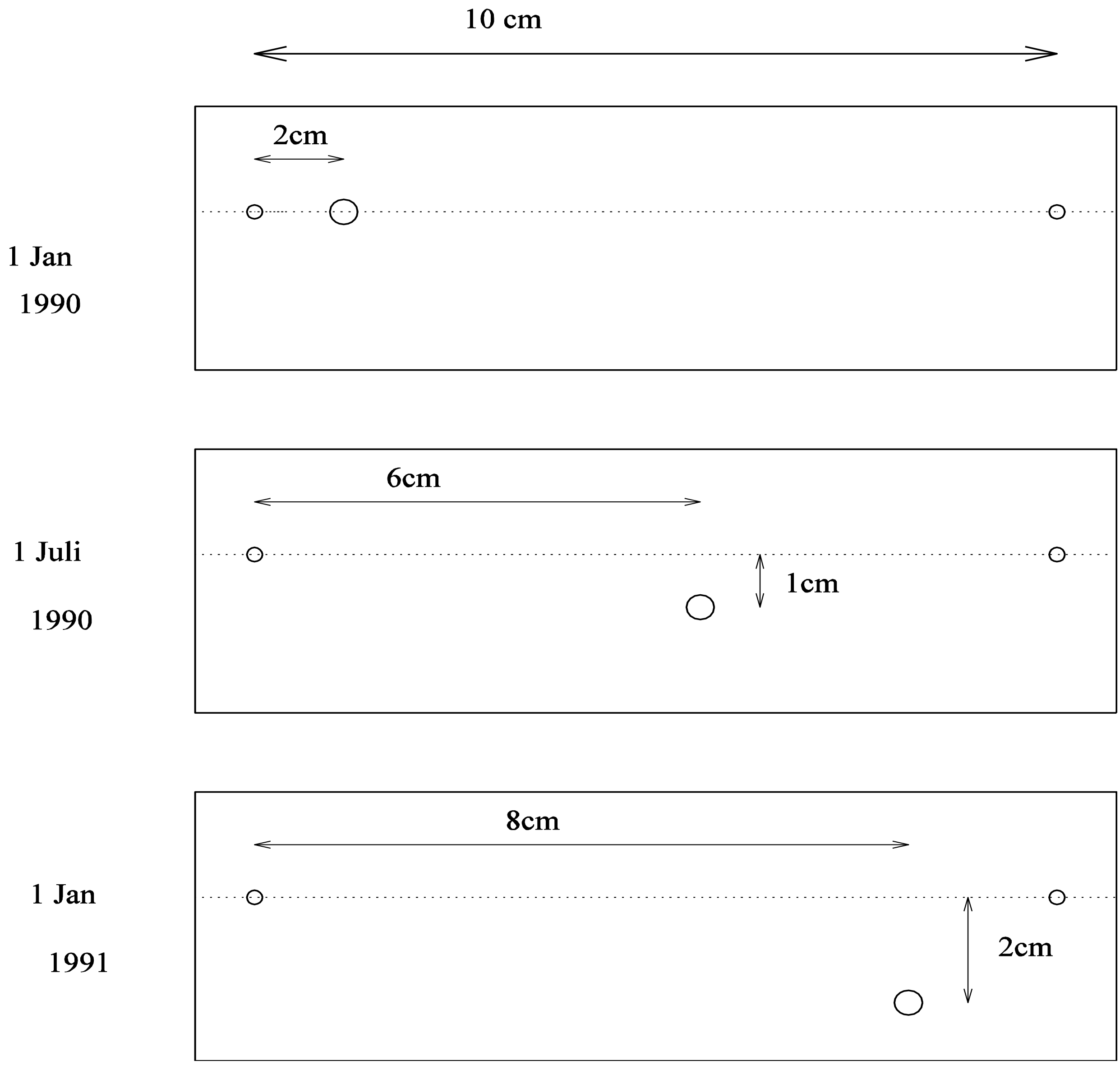
Genom upprepade reflektioner får vi spegelbilder som ligger på avståndet $2d$ ifrån varandra. Alla ljusstrålar från hjärtat går inne i glasstaven men när de träffar den övre ytan så tycks de komma från någon av spegelbilderna. För att ljuset inte ska totalreflekteras i den övre ytan måste ljuset träffa ytan med en infallsvinkel som är mindre än gränsvinkeln för totalreflektion. För spegelbilder som ligger till vänster om staven så har strålar som träffar den vänstra delen av den övre ytan störst chans att undvika totalreflektion.

I bilden ovan är en stråle från den andra spegelbilden till vänster inritad. Det är den stråle från spegelbilden som har störst infallsvinkel mot den övre ytan. För infallsvinkeln α gäller att $\tan\alpha = \frac{3d}{H}$ för den andra spegelbilden. För spegelbild *m* får vi $\tan\alpha = \frac{(2m-1)d}{H}$. För att beräkna största möjliga värde på *m* sätter vi in det största möjliga värdet på α vilket är gränsvinkeln för totalreflektion, $\theta_{tr} = 40{,}2^\circ$.

Vi får $2m - 1 = \frac{H}{d}\tan\theta_{tr}$ vilket ger att $m = \frac{H}{2d}\tan\theta_{tr} + \frac{1}{2} = \frac{25}{2\cdot 2{,}5}\tan 40{,}2^\circ + \frac{1}{2} = 4{,}7$.

**Svar:** Vi kan se fyra spegelbilder av hjärtat till vänster om centralbilden.

4.

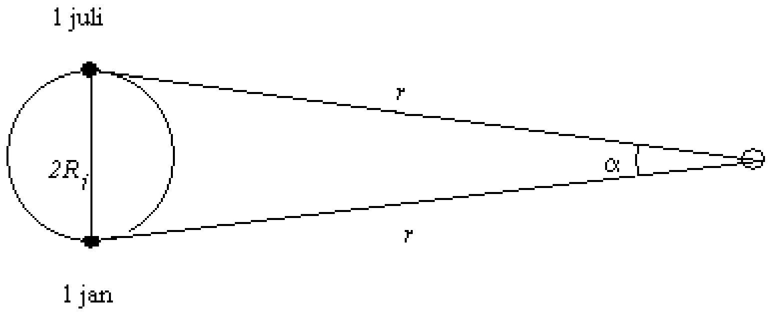



Vi definierar ett koordinatsystem så att *x*-axeln pekar åt höger i figurerna, *y*-axeln uppåt och *z*-axeln rakt ut från bilden.

Avståndet på bilderna mellan de avlägsna stjärnorna är i samtliga fall 10 cm vilket motsvarar en vinkel på en halv bågsekund, dvs

1 cm motsvarar $\frac{0{,}05°}{3600}$.

På ett år flyttar sig den närliggande stjärnan 6 cm på plåten. På ett halvår borde den flytta sig 3 cm men den har flyttat sig 4 cm . På grund av paralax har den alltså flyttat sig 1 cm på ett halvår.




Stjärnans läge och jordens positioner med ett halvårs mellanrum bildar en triangel. Den spetsiga vinkeln, α, i triangeln har värdet $\frac{0{,}05°}{3600}$. Avståndet till stjärnan betecknas $r$ och $R_j$ betecknar jordens banradie. Ur figuren ser vi att $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{R_j}{r}$ vilket ger att $r = \frac{R_j}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{149{,}6\cdot 10^9\,\text{m}}{\tan\frac{0{,}025°}{3600}.} = 1{,}23\cdot 10^{18}\text{m} = 130\text{ ljusår.}$

På ett år rör sig stjärnan 6 cm i x-led på plåten vilket motsvarar en vinkelhastighet $\omega_x = \frac{6\cdot 0{,}05°}{3600}\cdot\frac{\pi}{180°}\text{rad}/_\text{år}$. Stjärnans hastighet i x-led blir därför $v_x = r\cdot\omega_x = 1{,}23\cdot 10^{18}\text{m}\cdot\frac{6\cdot 0{,}05°}{3600}\cdot\frac{\pi}{180°}\text{år}^{-1} = 1{,}789\cdot 10^{12}\ \text{m}/_\text{år} = 56{,}7\ \text{km}/_\text{s}$.

På ett år rör sig stjärnan 2 cm i negativ riktning i y-led på plåten vilket motsvarar en vinkelhastighet $\omega_y = -\frac{2\cdot 0{,}05°}{3600}\cdot\frac{\pi}{180°}\text{rad}/_\text{år}$. Stjärnans hastighet i y-led blir därför
$v_y = r\cdot\omega_y = -1{,}23\cdot 10^{18}\text{m}\cdot\frac{2\cdot 0{,}05°}{3600}\cdot\frac{\pi}{180°}\text{år}^{-1} = -5{,}96\cdot 10^{11}\ \text{m}/_\text{år} = -18{,}9\ \text{km}/_\text{s}$.

För att beräkna stjärnans hastighet i z-led utnyttjar vi den uppmätta blåförskjutningen

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -3{,}0\cdot 10^{-4}$$

Frekvensändringen på ljuset $\Delta f$ är relaterat till den radiella hastigheten, $v_z$, som

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v_z}{c}$$

där c är ljusets hastighet. Vi behöver en relation mellan förändring i våglängd, $\Delta\lambda$, och förändring i frekvens, $\Delta f$, och utnyttjar att $\lambda = \frac{c}{f}$. Vi deriverar $\lambda$ med avseende på $f$.

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta f} \approx \frac{d\lambda}{df} = -\frac{c}{f^2} = -\frac{\lambda}{f}$$

Detta leder till

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

Vi kan nu få ett uttryck för hastigheten i z-led

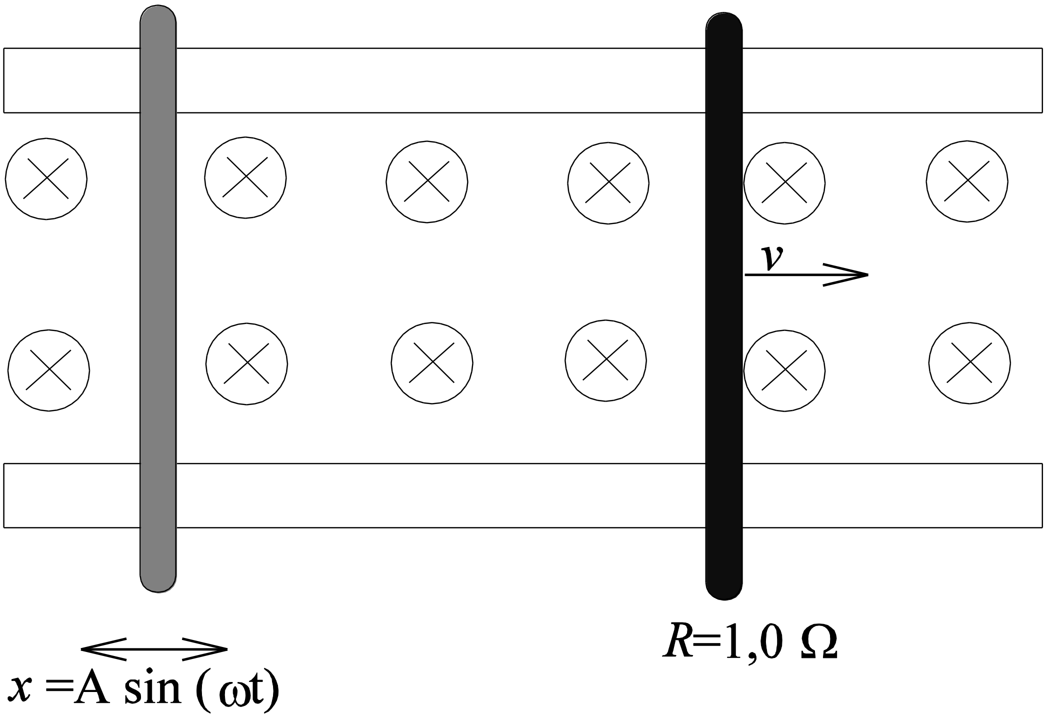
$$v_z = c\cdot\frac{\Delta f}{f} = -c\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -3{,}0\cdot 10^8\cdot(-3{,}0\cdot 10^{-4})\ \text{m}/_\text{s} = 9{,}0\cdot 10^4\ \text{m}/_\text{s}$$

**Svar:** Stjärnans hastighet är 57 km/s i x-led, -19 km/s i y-led och 90 km/s i z-led.

5.
Avståndet mellan de två perfekt ledande skenorna är $l = 20{,}0\ \mathrm{cm}$ och mellan skenorna går ett vinkelrätt magnetfält med styrkan $B = 550\,nT$. Den vänstra pinnen utför svängningen

$$x = A\sin\omega t$$

där $A = 0{,}05\ \mathrm{m}$ och $\omega = 2\pi\ \mathrm{rad/s}$.




Hastigheten på den vänstra pinnen, $v_{\text{vä}}$, får vi genom att derivera $x$ med avseende på $t$.

$$v_{\text{vä}} = A\omega\cos\omega t$$

När denna pinne rör sig vinkelrätt mot magnetfältet uppstår en elektromotorisk spänning, $\varepsilon_{\text{vä}}$, över pinnen.

$$\varepsilon_{\text{vä}} = l \cdot v_{\text{vä}} \cdot B$$

Denna elektromotoriska spänning kommer att driva en ström genom den högra pinnen då kommer att påverkas av en kraft eftersom denna pinne också befinner sig i magnetfältet. Den högra pinnen kommer därför också att röra sig med en hastighet, $v$, som varierar med tiden. Även i denna pinne uppstår en elektromotorisk spänning,

$$\varepsilon_{\text{hö}} = l \cdot v \cdot B\,.$$

Denna spänning motverkar den spänning som uppstod i den vänstra pinnen. Strömmen som går genom den högra pinnen kommer därför att ges av

$$I = \frac{\varepsilon_{\text{vä}} - \varepsilon_{\text{hö}}}{R}$$

Kraften på den högra pinnen kan nu skrivas

$$F = B \cdot I \cdot l = B \cdot l \frac{\varepsilon_{\text{vä}} - \varepsilon_{\text{hö}}}{R} = \frac{B \cdot l}{R}(B \cdot l \cdot A \cdot \omega \cos \omega t - B \cdot v \cdot l)$$

Detta stämmer med det uttryck som gavs i uppgiften,

$$F = k_1 \cdot v + k_2 \cos \omega t$$

Vi kan nu identifiera och beräkna konstanterna $k_1$ och $k_2$.

$$k_1 = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R} = -\frac{(550 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 0{,}2^2}{1{,}0} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^2}{\Omega} = 1{,}21 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^2}{\Omega}$$

$$k_2 = -\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot A \cdot \omega}{R} = -\frac{(550 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}05 \cdot 2\pi}{1{,}0} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^3}{\Omega s} = 3{,}80 \cdot 10^{-15} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^3}{\Omega s}$$

**Svar:** Konstanterna har värdena $k_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^2}{\Omega}$ och $k_2 = 3{,}8 \cdot 10^{-15} \frac{\mathrm{T}^2\mathrm{m}^3}{\Omega\mathrm{s}}$