WALLENBERGS FYSIKPRIS

KVALIFICERINGS- OCH LAGTÄVLING
28 januari 2010

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Ballongens volym är

$$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 1{,}5 \text{ m}^3 = 42{,}4 \text{ m}^3.$$

Lyftkraften från omgivande luft är

$$F_\mathrm{L} = \rho g V = 1{,}293 \cdot 9{,}82 \cdot 42{,}4 \text{ N} = 539 \text{ N},$$

där vi räknat med luftens densitet vid standardtryck och -temperatur. Heliumet i ballongen har tyngden

$$F_{g,\mathrm{He}} = mg = \rho V g = 0{,}178 \cdot 42{,}4 \cdot 9{,}82 \text{ N} = 74 \text{ N}.$$

Största möjliga nyttolast blir alltså

$$\frac{(539 - 74) \text{ N}}{9{,}82 \text{ N/kg}} = 47 \text{ kg}.$$

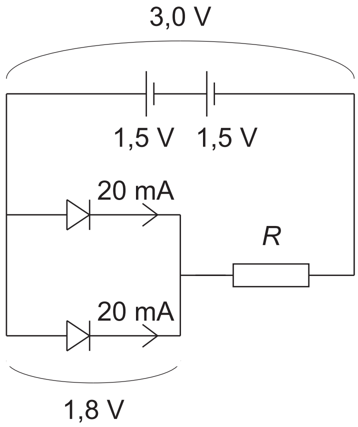
Även om vi antar att ballongen i sig väger några kg verkar det alltså som om det skulle gå att lyfta 30 kg med ballongen. Men vi har här räknat med att det endast finns helium i ballongen. I verkligheten bör en del luft läcka in. Och att ballongen lyfter till en höjd av 600 m med så liten nettolyftkraft verkar inte troligt.

Svar: I princip bör det vara möjligt att ballongen kan lyfta en pojke, men det är tveksamt om den kan göra en flygtur enligt uppgiften.

2. (a) Vi vill att spänningen över varje lysdiod ska vara 1,8 V. Då måste vi seriekoppla batterierna så att vi får en spänningskälla som ger $(1{,}5 + 1{,}5)$ V $= 3{,}0$ V. Lysdioderna kopplas med ett motstånd enligt kopplingsschemat nedan.

Strömmen genom varje lysdiod är 20 mA (enligt databladet). Strömmen genom motståndet blir då $(20 + 20)$ mA $= 40$ mA. Om spänningen över lysdioderna ska vara 1,8 V måste spänningen över motståndet vara $(3{,}0 - 1{,}8)$ V $= 1{,}2$ V. Motståndets resistans skall alltså vara

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1{,}2 \text{ V}}{40 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 30 \ \Omega.$$



(b) Strömmen från varje batteri blir alltså 40 mA. Vardera batteri kommer då att räcka tiden

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{500 \text{ mAh}}{40 \text{ mA}} = 12{,}5 \text{ h}.$$

Svar: (a) Se kopplingsschemat ovan. Motståndet ska ha resistansen 30 Ω. (b) Lampan bör lysa i 12,5 timmar.

Kommentar: Räknar man med spänningen 2,2 V över dioderna får man att motståndet ska ha resistansen 20 Ω.

3. Strömmen i tråden är omvänt proportionell mot resistansen och därmed också omvänt proportionell mot trådens längd l,

$$I = k_1 \cdot \frac{1}{l},$$

där k_1 är en konstant. Energiutvecklingen i en tråddel mellan över- och understycket kan således skrivas

$$E = RI^2 t = k \cdot \frac{t}{l^2},$$

där k är en konstant. En sådan tråddel behöver avge samma energimängd i de båda fallen (vi antar att energiförlusterna är oberoende av uppvärmningstiden). Vi får

$$E = k \cdot \frac{t_1}{l_1^2} = k \cdot \frac{t_2}{l_2^2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 t_1 = \left(\frac{160}{184}\right)^2 \cdot 40 \text{ s} = 30 \text{ s}.$$

Svar: 30 s.

Kommentar: Man kan också resonera som så att energin som måste tillföras är proportionell mot trådlängden, $E = k_1 \cdot l$ (om tråden görs kortare blir mängden vax som behöver smältas mindre). Trådens resistans är också proportionell mot längden, $R = k_2 \cdot l$. Den av tråden avgivna energin är

$$E = \frac{U^2}{R} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{ER}{U^2} = k \cdot l^2,$$

där k är en konstant $(= k_1 k_2 / U^2)$.

4. Vi behöver först bestämma potatisens fart när den lämnar röret. Sedan kan vi ta reda på potatisens acceleration i röret och därefter använda Newtons andra lag på potatisen i röret.

Vi räknar i y-led för att bestämma falltiden:

$$y = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}56}{9{,}82}}\ \mathrm{s} = 0{,}34\ \mathrm{s}.$$

Räkning i x-led ger utgångsfarten:

$$x = vt \Rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{6{,}9\ \mathrm{m}}{0{,}34\ \mathrm{s}} = 20{,}4\ \mathrm{m/s}.$$

Om vi antar konstant acceleration i röret, fås denna acceleration ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{20{,}4^2}{2 \cdot 1{,}1}\ \mathrm{m/s^2} = 189{,}7\ \mathrm{m/s^2}.$$

Newtons andra lag på potatisen ger

$$p_0 \cdot A - p \cdot A = ma,$$

där p_0 är lufttrycket utanför röret, p är trycket inne i röret, A är rörets tvärsnittsarea och m är potatisens massa. Löser vi ut p får vi

$$p = p_0 - \frac{ma}{A} = 1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} - \frac{0{,}024\ \mathrm{kg} \cdot 189{,}7\ \mathrm{m/s^2}}{\pi \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2} = 95 \cdot 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

Vi har i beräkningarna försummat luftmotstånd och friktion i röret. Det verkliga trycket bör därför vara lägre än 95 kPa. Vi har också antagit att det är samma tryck överallt i röret.

Om röret hålls rakt upp blir potatisens acceleration i röret istället

$$a_{\mathrm{ny}} = a - g = (189{,}7 - 9{,}82)\ \mathrm{m/s^2} = 179{,}9\ \mathrm{m/s^2}.$$

Farten när potatisen lämnar röret:

$$v = \sqrt{2a_{\mathrm{ny}}s} = \sqrt{2 \cdot 179{,}9 \cdot 1{,}1}\ \mathrm{m/s} = 19{,}9\ \mathrm{m/s}.$$

Sökta höjden (ovanför rörets mynning) fås ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{19{,}9^2}{2 \cdot (-9{,}82)}\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}.$$

Svar: Lägre än 95 kPa. Potatisen bör komma 20 m ovanför rörets mynning.

Kommentar: Uppgiften kan lösas på olika sätt när väl utgångsfarten (20,4 m/s) är bestämd. Eftersom arbetet som uträttas på potatisen är lika med ökningen av dess rörelseenergi får vi

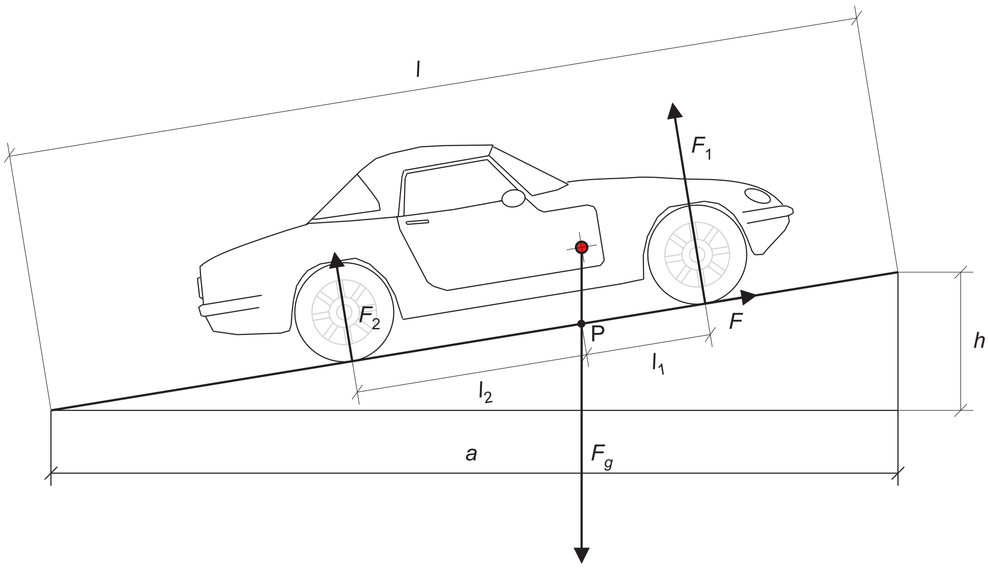
$$(p_0A - pA) \cdot s = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \frac{mv^2}{2As} = \ldots = 95 \cdot 10^3 \text{ Pa},$$

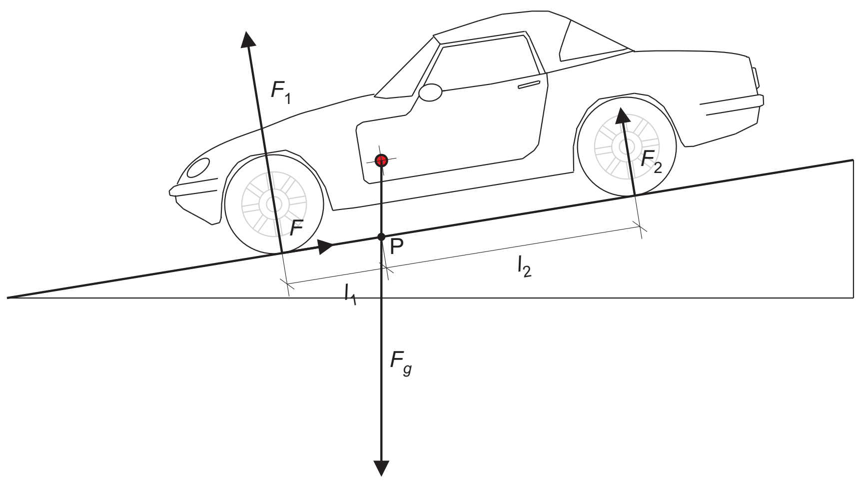
där s är rörets längd. På liknande sätt får vi i sista delen av uppgiften att

$$(p_0A - pA - mg) \cdot s = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{(p_0 - p)As}{mg} - s = \ldots = 20 \text{ m},$$

där h är potatisens höjd ovanför mynningen när den vänder.

5. Kraftsituationen visas i figuren nedan.





Kraften som betecknats F är reaktionskraften på framdäcket från vägbanan till följd av att däcket försöker knuffa vägbanan bakåt när motorn driver på det. För att inte däcket ska slira måste denna reaktionskraft vara mindre än största möjliga friktionskraft mellan däck och vägbana, det vill säga

$$F \leq F_{f,\max} = \mu F_1.$$

Detta ger oss villkoret $\mu \geq F/F_1$. Vi undersöker gränsfallet då likhet råder,

$$\mu = \frac{F}{F_1}. \tag{1}$$

Kraftjämvikt (samt likformighet) ger

$$F_1 + F_2 = F_g \cdot \frac{a}{l} \tag{2}$$

och

$$F = F_g \cdot \frac{h}{l}. \tag{3}$$

Momentjämvikt (med P som momentpunkt) ger

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \tag{4}$$

Löser vi ut F_2 ur momentjämviktsvillkoret (4) och sätter in i kraftjämviktsvillkoret (2) får vi

$$F_1 + F_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} = F_g \cdot \frac{a}{l},$$

som efter lite algebra ger

$$F_1 = \frac{l_2 F_g a}{l(l_1 + l_2)}.$$

Insättning av detta och (3) i (1) ger

$$\mu = \frac{F_g h(l_1 + l_2)}{F_g a l_2} = \frac{h(l_1 + l_2)}{a l_2}.$$

Insättning av mätvärden från figuren ger nu erforderligt friktionstal när man kör framåt,

$$\mu = \frac{22 \cdot (37 + 20)}{135 \cdot 37} = 0{,}251$$

respektive när man backar

$$\mu = \frac{22 \cdot (40{,}5 + 16{,}5)}{135 \cdot 40{,}5} = 0{,}229.$$

Friktionstalet kan alltså vara lite lägre vid backning, vilket gör att det är lättare att få grepp om man backar.

Svar: Ja, det är sant. Friktionstalet som krävs är 0,25 vid körning framåt, 0,23 vid backning.

6. Avläsning i diagrammet ger periodtiden

$$T = \frac{(5{,}35 - 3{,}69)\ \text{s}}{6} = 0{,}277\ \text{s}.$$

Fjäderns fjäderkonstant fås ur

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}40}{0{,}277^2}\ \text{N/m} = 206{,}3\ \text{N/m}.$$

Under stötförloppet är vagnarna så nära varandra som möjligt, och fjädern som mest hoptryckt, i det tidsögonblick då de har samma hastighet (då är vagnarnas relativa hastighet momentant noll och de är i vila i förhållande till varandra). Denna hastighet, v, fås med hjälp av rörelsemängdens bevarande, som ju gäller också under stötförloppet:

$$(0{,}40 \cdot 0{,}50 - 0{,}60 \cdot 0{,}25)\ \text{kgm/s} = (0{,}50 + 0{,}25)\ \text{kg} \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}0667\ \text{m/s}.$$

Fjäderns hoptryckning Δl fås ur energiprincipen:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{k \cdot (\Delta l)^2}{2} + \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - m_1 v^2 - m_2 v^2}{k}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}50 \cdot 0{,}40^2 + 0{,}25 \cdot 0{,}60^2 - 0{,}50 \cdot 0{,}0667^2 - 0{,}25 \cdot 0{,}0667^2}{206{,}3}}\ \text{m} = 0{,}028\ \text{m}.$$

Svar: 2,8 cm

Kommentar: Vanligt fel var att eleverna satte $mg = 2kA$, där A är amplituden, och bestämde k ur detta. Detta är ej korrekt, även om värdet man får är nästan rätt.

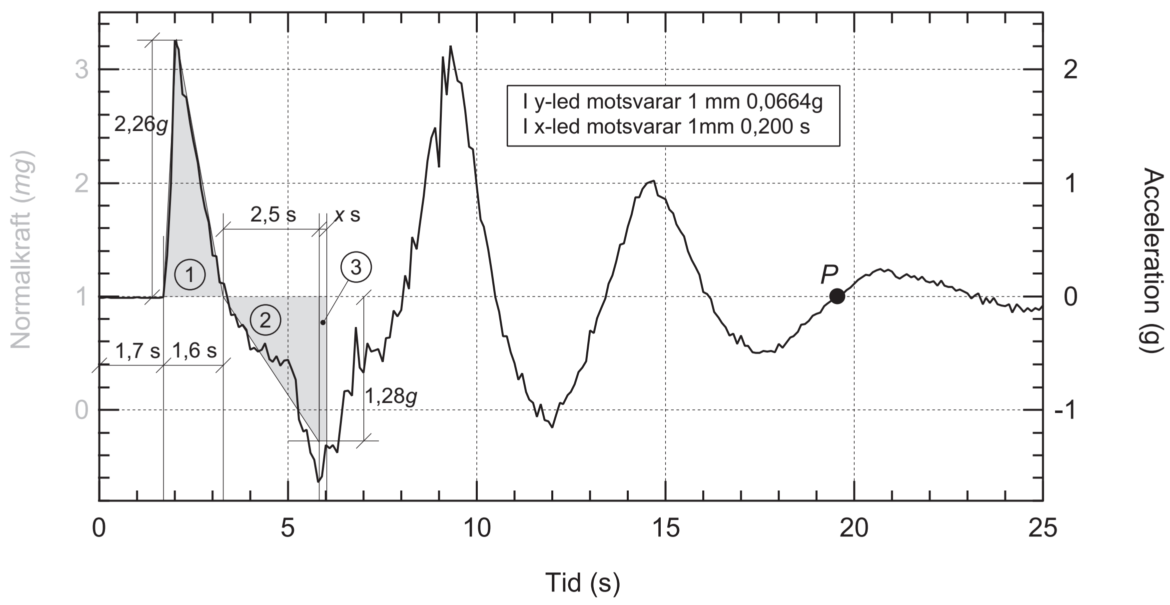
7. Newtons andra lag för personen, $ma = F_N - mg$, ger

$$\frac{a}{g} = \frac{F_N}{mg} - 1.$$

Diagrammet visar just $\frac{F_N}{mg}$, så om vi förskjuter grafen 1 enhet nedåt får vi en accelerationsgraf (i enheten g). Eftersom

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

kan vi bestämma hastighetsförändringar genom att beräkna areor mellan a-t-grafen och t-axeln. Notera att eftersom accelerationen är positiv direkt efter start har positiv riktning valts uppåt.



(a) Hastigheten ökar under första uppfärden så länge $a > 0$, det vill säga fram till $t = 3{,}3$ s. Område 1 i figuren nedan har arean

$$\frac{1{,}6 \cdot 2{,}26 \cdot 9{,}82}{2} \text{ m/s} = 17{,}8 \text{ m/s}.$$

Eftersom $v = 0$ från början blir den största farten 18 m/s.

(b) Hastigheten är noll vid den första tidpunkt då $\int a(t)\,dt = 0$. Hastighetsminskningen mellan $t = 3{,}3$ s och $t = 5{,}8$ s:

$$\frac{2{,}5 \cdot 1{,}28 \cdot 9{,}82}{2} \text{ m/s} = 15{,}7 \text{ m/s}.$$

Hastigheten då $t = 5{,}8$ s är alltså $(17{,}8 - 15{,}7)$ m/s $= 2{,}1$ m/s. Antag att det tar ytterligare x s innan hastigheten blir noll. Från figuren får vi ekvationen

$$x \cdot 1{,}28g = 2{,}1, \tag{5}$$

där $1{,}28g$ är en underskattning vilket gör att x blir lite för stort. Löser vi (5) får vi $x = 0{,}2$ s. Hastigheten verkar alltså bli noll senast då $t = (5{,}8 + 0{,}2)$ s $= 6{,}0$ s, det vill säga 4,3 s efter start.

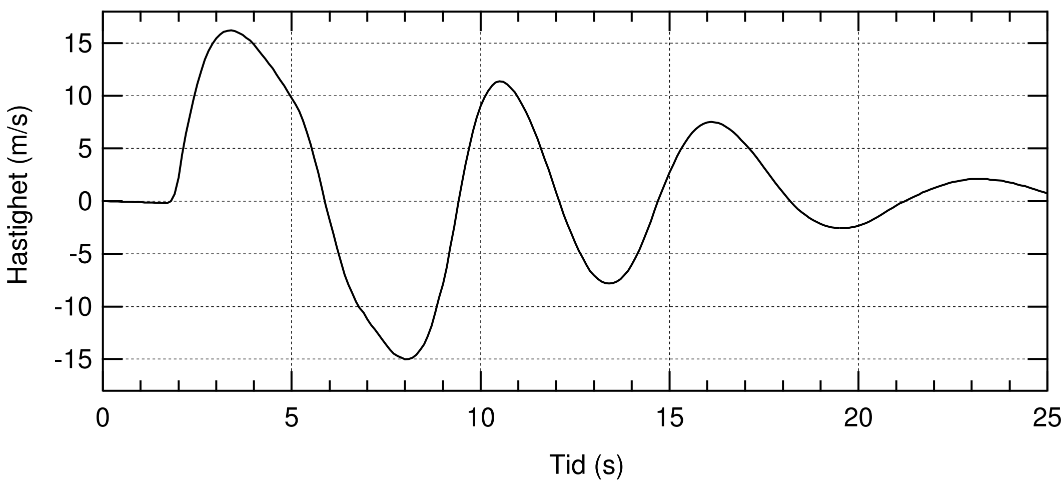
(c) När hastigheten är noll första gången (då $t = 6$ s) är personen högst upp. Vad händer sedan? I tabellen visas hur accelerationen och hastigheten är riktade vid olika tidpunkter samt hur personen rör sig.

Tid	a	v	Vad händer?
6 s $< t <$ 8 s	↓	↓	på väg ned, farten ökar
8 s $< t <$ 9,3 s	↑	↓	på väg nedåt, farten minskar
$t \sim$ 9,3 s	↑	0	i ett undre vändläge
9,3 s $< t <$ 10,5 s	↑	↑	på väg uppåt, farten ökar
10,5 s $< t <$ 12 s	↓	↑	på väg uppåt, farten minskar
$t \sim$ 12 s	↓	0	i ett övre vändläge
12 s $< t <$ 13,4 s	↓	↓	på väg nedåt, farten ökar
13,4 s $< t <$ 14,6 s	↑	↓	på väg nedåt, farten minskar
$t \sim$ 14,6 s	↑	0	i ett undre vändläge
14,6 s $< t <$ 16,1 s	↑	↑	på väg uppåt, farten ökar
16,1 s $< t <$ 17,7 s	↓	↑	på väg uppåt, farten minskar
$t \sim$ 17,7 s	↓	0	i ett övre vändläge
17,7 s $< t <$ 19,6 s	↓	↓	på väg nedåt, farten ökar

I tidpunkten P är alltså personen på väg ned för tredje gången. Hastigheten är riktad nedåt.

Svar: (a) 18 m/s (b) Ca 4,3 s efter start. (c) Personen har åkt uppåt tre gånger och är på sin tredje nedfärd. Hastigheten är riktad nedåt.

Kommentar: Beroende på hur man läser diagrammet får man något olika resultat. Nedan visas v-t-diagram som tagits fram genom numerisk integrering av mätdata.



Gröna Lund skriver "Hastighet: 60 km/h" på sin hemsida. En åktur kan ses på
www.youtube.com/watch?v=ZSbjgnqS4g0

8. (a) Under tiden dt avger den stelnande isen energimängden

$$W_1 = c_s \cdot m = c_s \cdot \rho_{is} \cdot A \cdot dx$$

Energimängden som borttransporteras genom isen ges av

$$W_2 = P_{ledning} \cdot dt = \lambda \frac{A}{x}(T_0 - T_{luft}) \cdot dt$$

Under antagandet att $W_1 = W_2$ får vi

$$c_\mathrm{s} \cdot \rho_\mathrm{is} \cdot A \cdot dx = \lambda \frac{A}{x}(T_0 - T_\mathrm{luft}) \cdot dt,$$

vilket kan skrivas

$$x\,dx = \frac{\lambda(T_0 - T_\mathrm{luft})}{\rho_\mathrm{is} c_\mathrm{s}}\,dt.$$

Enligt ledtråden innebär detta att

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\lambda(T_0 - T_\mathrm{luft})}{\rho_\mathrm{is} c_\mathrm{s}} \cdot t + C_1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2\lambda(T_0 - T_\mathrm{luft})}{\rho_\mathrm{is} c_\mathrm{s}} \cdot t + C},$$

där C $(= 2C_1)$ är en konstant. Insättning av siffror ($\rho_\mathrm{is} = 917$ kg/m^3, $c_\mathrm{s} = 334$ kJ/kg) ger

$$x = \sqrt{1{,}306 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \cdot t + C}.$$

Villkoret att $x = 0{,}10$ m då $t = 0$ ger $C = 0{,}010$ m^2. Isens tjocklek kan alltså beräknas med formeln

$$x = \sqrt{1{,}306 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \cdot t + 0{,}010\ \mathrm{m^2}}.$$

(b) Isens tjocklek efter 2,0 dygn:

$$x = \sqrt{1{,}306 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \cdot 2{,}0 \cdot 24 \cdot 3\,600\ \mathrm{s} + 0{,}010\ \mathrm{m^2}} = 0{,}18\ \mathrm{m}.$$

Svar: (a) Isens tjocklek efter tiden t ges av $x = \sqrt{1{,}306 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \cdot t + 0{,}010\ \mathrm{m^2}}$. (b) 18 cm