

## Problem 1: En laddning speglad i ett metalliskt föremål

### Introduktion – bildladdningsmetoden

En punktladdning  $q$  är placerad nära ett jordat metalliskt klot som har radien  $R$  [se fig 1a]. Därigenom induceras en laddningsfördelning på klotet. Att beräkna det elektriska fältet och den elektriska potentialen som uppstår på klotet med sedvanliga metoder är mycket tidskrävande. En fiffig genväg är att utnyttja den s.k. bildladdningsmetoden, där fältet och potentialen på klotet kan beräknas genom att placera en tänkt punktladdning  $q'$  inuti klotet (behöver ej visas). Notera: Det elektriska fältet från denna bildladdning  $q'$  återger fältet och potentialen endast utanför klotet och på dess utsida.

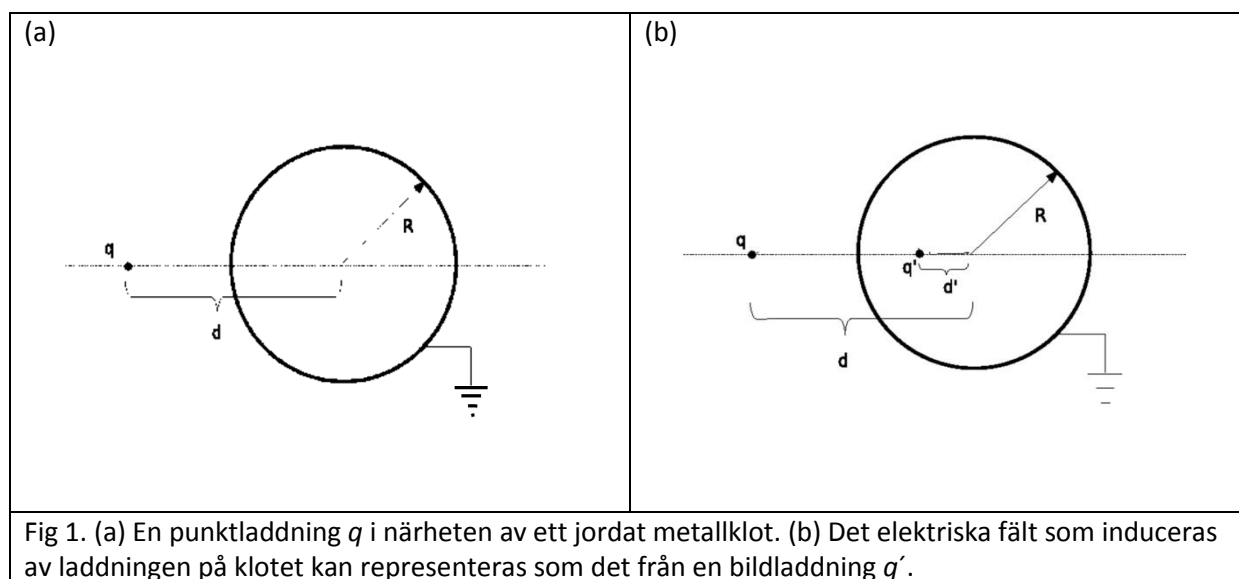


Fig 1. (a) En punktladdning  $q$  i närheten av ett jordat metallklot. (b) Det elektriska fält som induceras av laddningen på klotet kan representeras som det från en bildladdning  $q'$ .

### Uppgift 1 – Bildladdningen

Problemet symmetri ger att bildladdningen  $q'$  måste ligga på linjen mellan laddningen  $q$  och klotets mittpunkt [se fig. 1(b)].

- Vilket värde har potentialen på klotets yta? (0,3 poäng)
- Uttryck  $q'$  och avståndet  $d'$  till klotets mittpunkt i storheterna  $q$ ,  $d$  och  $R$ . (1,9 poäng)
- Beräkna kraften som verkar på laddningen  $q$ . Är kraften repulsiv? (0,5 poäng)

### Uppgift 2 – Skärmning av ett elektrostatiskt fält

Antag att en punktladdning placeras på avståndet  $d$  från mittpunkten på ett jordat metallklot med radien  $R$ . Vi ska studera hur ett sådant klot påverkar det elektriska fältet i en punkt A på motsatt sida av klotet (se fig 2). Punkten A ligger på sammanbindningslinjen mellan  $q$  och klotets mittpunkt och på avståndet  $r$  från punktladdningen  $q$ .

- Beräkna den elektriska fältstyrkan i punkten A. (0,6 poäng)
- Beräkna den elektriska fältstyrkan i punkten A för stora avstånd  $r \gg d$ , genom att utnyttja approximationen  $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$ , där  $a \ll 1$ . (0,6 poäng)
- Vilket värde på  $d$  gör att det jordade metallklotet skärmar fältet från laddningen  $q$ , så att det elektriska fältet i punkten A blir exakt noll. (0,3 poäng)

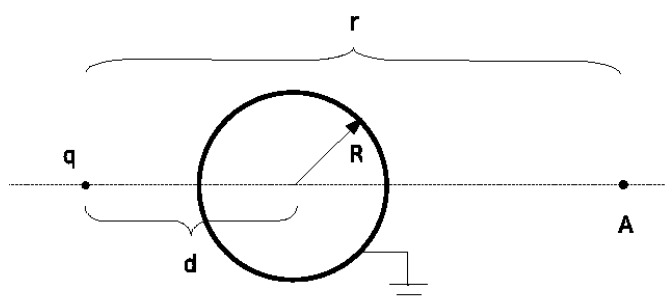


Fig 2. Det elektriska fältet skärmas delvis av det jordade metallklotet.

### Uppgift 3 – Små förändringar i det elektriska fältet från det jordade metallklotet

En punktladdning  $q$  med massan  $m$  är upphängd i en tråd med längden  $L$  som är fastsatt i en närbelägen vägg. Bortse från elektrostatiske påverkan från väggen och försumma gravitationen. Punktladdningen utgör en matematisk pendel och tråden sitter fast i väggen på avståndet  $l$  från klotets mittpunkt (se fig 3).

- Beräkna storleken på den elektriska kraften på punktladdningen  $q$  för en given vinkel  $\alpha$  och rita in riktningen i en figur (0,8 poäng)
- Beräkna komponenten av denna kraft vinkelrätt mot tråden uttryckt  $l$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $q$  och  $\alpha$ . (0,8 poäng)
- Beräkna frekvensen för små svängningar hos pendeln (1,0 poäng)

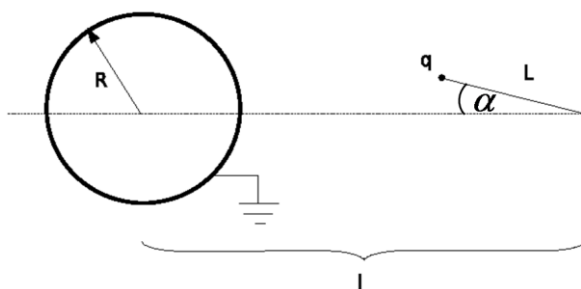


Fig 3. En punktladdning i närheten av ett jordat klot svänger som en pendel.

### Uppgift 4 – Ett systems elektrostatiske energi

För en fördelning av elektriska laddningar är det viktigt att veta vad systemets elektrostatiske energi blir (se fig. 1a). I vårt problem finns dels en elektrostatiske växelverkan mellan den yttre laddningen och de inducerade laddningarna på klotet, dels en elektrostatiske växelverkan mellan de inducerade laddningarna på klotet själva. Bestäm följande elektrostatiske energier, som funktion av laddningen  $q$ , sfärens radie  $R$  och avståndet  $d$ :

- den elektrostatiske energin för växelverkan mellan laddningen  $q$  och de inducerade laddningarna på klotet. (1,0 poäng)
- den elektrostatiske energin för växelverkan mellan de inducerade laddningarna på klotet. (1,2 poäng)
- den totala elektrostatiske växelverkansenergin för systemet. (1,0 poäng)

**Ledning:** Det finns flera sätt att lösa detta problem:

(1) I det ena använder man följande integral,

$$\int_d^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}.$$

(2) I det andra använder man det faktum att den elektrostatiske energin för en samling av  $N$  laddningar  $q_i$  placerade i punkterna  $\vec{r}_i, i=1, \dots, N$  blir en summa över alla par av laddningar:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$