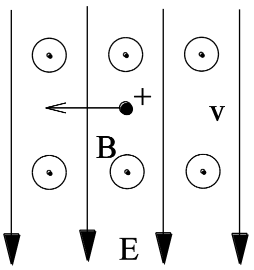
Final i Wallenbergs fysikpris

25-26 mars 2011.
Teoriprov.
Lösningsförslag.

1)
Fysikern Hilda leker med en protonstråle i en vakuumkammare. Hon accelererar protonerna från stillastående med en ”protonkanon” på 3,0 kV. Hon försöker skjuta prick med protonstrålen på en liten måltavla som ligger 1,00 meter framför kanonen.
Mellan kanonen och måltavlan finns elektriska och magnetiska fält enligt figuren nedan.
Genom att ändra fälten kan hon justera protonernas riktning. Just nu går protonerna praktiskt taget horisontellt rakt framåt, men hamnar 1,00 mm för lågt.

Hur mycket ska Hilda ändra magnetfältet för att protonerna ska träffa mitt i prick?



Lösningsförslag:

I ”protonkanonen” får protonerna rörelseenergin E=3,0·10^3·1,602·10^{-19} J.

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}0 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}}}\,\mathrm{m/s} = 7{,}58 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$$

Protonerna sjunker sträckan Δy under sin färd sträckan s = 1,00 m mot målet. De påverkas av en acceleration

$$a = \frac{2\Delta y}{t^2} = \frac{2\Delta y v^2}{s^2}$$

För att motverka fallet krävs en kraft $F = ma$ som vi får genom att ändra magnetfältets styrka.

$$F = qv\Delta B$$

$$\Delta B = \frac{F}{qv} = \frac{ma}{qv} = \frac{m2\Delta y v^2}{qvs^2} = \frac{2m\Delta y v}{qs^2} = \frac{2 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}58 \cdot 10^5}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}00^2}\,\mathrm{T} = 1{,}58 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$$

Svar: Magnetfältets styrka måste öka med 1,6·10^{-5} T för att protonerna ska träffa mitt i prick.

2)

En stuntman kör sin EU-moped på bakhjulet på den blanka isen på en sjö. Han håller hela tiden farten 70 km/h relativt isen. Luftmotstånd och rullmotstånd uppgår tillsammans till 400 N och kan ses som konstanta under hela färden.
På isen ligger en metallplatta som är 3,0 m lång i färdriktningen. Stuntmannen kör upp på plattan. Greppet på ovansidan är så bra att motorcykeln inte spinner.
Friktionskraften mellan isen och metallplattan är 0,18 av normalkraften. Metallplattan väger 10,0 kilogram och stuntmannen inklusive moped väger 140,0 kg.

Hur långt bakåt har metallplattan åkt efter det att motorcykeln passerat och plattan slutat glida på isen?

Lösningsförslag:
Mopedens hastighet relativt marken: v_{moped} = 70 km/h $= \frac{70}{3,6}\ \mathrm{m/s} = 19,4\ \mathrm{m/s}$.
Luftmoståndskraft: F_{mot} = 400 N.
Mopedens och stuntmannens totala massa: m_{moped} = 140,0 kg.
Metallplattans massa: m_p = 10,0 kg.
Total massa av platta, moped och stuntman: M = 150,0 kg.
Friktionskoefficient mellan platta och is: μ = 0,18.
Metallplattans längd: s=3,0 m.

Mopeden måste påverkas av kraften F_{mot} från plattan för att hålla konstant fart.
Kraften från mopeden på plattan är lika stor som kraften på mopeden från plattan.
Friktionskraften på plattan är: $F_f = \mu Mg$.
Enligt Newtons andra lag är $m_p a = F_{mot} - F_f$, där a är plattans acceleration.

$$a = \frac{F_{mot} - \mu Mg}{m_p} = \frac{400 - 0,18 \cdot 150,0 \cdot 9,82}{10,0} = 13,49\ \mathrm{m/s^2}$$

Mopeden kör over plattan på tiden t och plattan flyttar sig under den tiden en sträcka $1/2at^2$.

$$t = \frac{s - 0,5 \cdot at^2}{v_{moped}}$$

$$t^2 + \frac{2v_{moped}}{a}t - \frac{2s}{a} = 0$$

$$t = -\frac{v_{moped}}{a} \pm \sqrt{\frac{{v_{moped}}^2}{a} + \frac{2s}{a}} = -1,44 \pm \sqrt{1,44^2 + 0,44}\ \mathrm{s}$$

Vi är intresserade av den positiva lösningen som ger t = 0,147 s.
Under den tiden flyttar sig plattan $s = \frac{at^2}{2} = \frac{13,49 \cdot 0,147^2}{2}\ \mathrm{m} = 0,146\ \mathrm{m}$.
Plattan uppnår farten $v = at = 13,49 \cdot 0,147\ \mathrm{m/s}$ = 1,98 m/s.
Plattan rör sig sträckan s_f efter att mopeden lämnat den.

$$s_f = \frac{0^2 - v^2}{-2\mu g} = \frac{-1,98^2}{-2 \cdot 0,18 \cdot 9,82}\ \mathrm{m} = 1,109\ \mathrm{m}$$

Svar: Plattan har totalt rört sig sträckan 0,146 + 1,109 m = 1,25 m.

3)

Hilda gör ett nytt experiment i vakuumkammaren. Hon har målat en 5,0 meter lång koppartråd svart med mycket tunn färg. Tråden har en diameter på 0,100 mm och spänns upp så den svävar fritt i luften. Det är 20˚C i labbet, och tråden i vakuumkammaren har denna temperatur innan man skickar ström genom den. Hilda skickar en konstant ström på 0,30 A genom tråden och väntar en lång stund tills tråden är i termisk jämvikt. En koppartråd på en meter utvidgar sig med $16{,}8 \cdot 10^{-6}$ m för varje grad den uppvärms.

Hur mycket längre blir tråden av uppvärmningen?

Lösningsförslag:

Tråden kommer att tillföras energi av den ström som går genom tråden. För att kunna beräkna den effekt, P_{el}, som utvecklas behöver vi beräkna trådens resistans, R, och tar reda på koppars resistivitet, ρ, från tabell.
$\rho = 1{,}67 \cdot 10^{-8}$ Ωm vid 20˚C. Resistiviteten är temperaturberoende men till att börja med antar vi att den är konstant i det temperaturintervall vi undersöker. Tråden har längden l = 5,00 m och radien $r = 0{,}05 \cdot 10^{-3}$ m.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\pi r^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{5{,}00}{\pi(0{,}05 \cdot 10^{-2})^2}\,\Omega = 10{,}63\ \Omega$$

$$P_{\mathrm{el}} = RI^2 = 10{,}63 \cdot 0{,}30^2\mathrm{W} = 0{,}9568\ \mathrm{W}$$

Tråden kommer också att tillföras energi genom strålning från omgivningen och den kommer att förlora energi genom strålning.
Tillförd effekt är $P_{el} + P_{omg}$ där P_{omg} ges av uttrycket för svartkroppsstrålning $\sigma T_{omg}^4 A$. Omgivningens temperatur är T_{omg}^4 = 293 K, $A = 2\pi rl$ är trådens area och konstanten $\sigma = 5{,}6705 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.
Utsänd effekt är $P_{tr} = \sigma T_{tr}^4 A$ där T_{tr} är trådens temperatur.
När tråden har kommit i termisk jämvikt gäller $\sigma T_{tr}^4 A = P_{el} + \sigma T_{omg}^4 A$.

$$T_{\mathrm{tr}}^4 = \frac{P_{\mathrm{el}}}{\sigma A} + T_{\mathrm{omg}}^4 = \frac{0{,}9568}{5{,}6705 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}00} + 293^4 = 1{,}811 \cdot 10^{10}\ \mathrm{K}^4$$

Trådens jämviktstemperatur blir T_{tr} =367 K. Trådens temperatur har ökat med ΔT = 367 – 293 = 74 K.
Koppartrådens förlängning, Δl, blir då

$$\Delta l = 5{,}00 \cdot 16{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 74\ \mathrm{m} = 6{,}2 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$

Svar: Med antagandet att resistiviteten inte är temperaturberoende kommer tråden att förlängas 6,2 mm.

Om vi tar hänsyn till resistansens temperaturberoende använder vi sambandet

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T) = R_0(1 + \alpha[T_{\mathrm{tr}} - T_0])$$

Där R_0 är resistansen vid T_0 = 293 K och temperaturkoefficienten $\alpha = 4{,}33 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$ enligt tabell. Om vi jämför med första lösningsförslaget ser vi att vi behöver byta P_{el} mot $P_{el}(1+\alpha[T_{tr}-T_0])$. Detta ger

$$T_{\mathrm{tr}}^4 = \frac{0{,}9568(1 + 4{,}33 \cdot 10^{-3}[\mathrm{T_{tr}} - 293])}{5{,}6705 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}00} + 293^4$$

Denna ekvation löser man lämpligen grafiskt på räknaren eller med iteration vilket ger T_{tr} = 387 K.
Temperaturhöjningen blir nu ΔT = 387 -293 = 94 K. Koppartrådens förlängning blir då

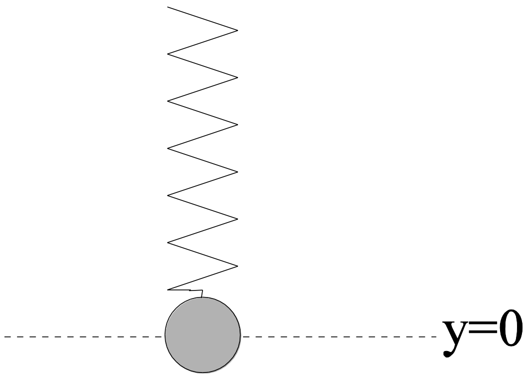
$$\Delta l = 5{,}00 \cdot 16{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 94\ \mathrm{m} = 7{,}9 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}$$

Svar: Med hänsyn taget till att resistiviteten är temperaturberoende kommer tråden att förlängas 7,9 mm.

4)
En laddad kula med massan 0,25 g och laddningen +0,15 μC svänger i en fjäder med fjäderkonstanten k= 1,0 mN/m. När kulan passerar jämviktsläget y=0 på väg nedåt slås ett nedåtriktad elektriskt fält, **E,** på. Fältet varierar med höjden enligt (y positiv uppåt)

E= (20,0·y) kV/m. Fältet är alltså riktat nedåt då y är negativ och riktat uppåt då y är positiv.

Kulan har farten 2,0 dm/s då den passerar jämviktläget. Efter 0,10 s slås fältet av. Vid vilken tidpunkt passerar kulan y=0 för första gången efter att fältet är avslaget?



Med elektriskt fält:

Kulan påverkas av både en fjäderkraft, -ky, och en elektrostatisk kraft qE=20·10^3qy.

$$m\ddot{y} = -ky + 20 \cdot 10^3 qy \qquad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = -0{,}2$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} y + \frac{20 \cdot 10^3 q}{m} y$$

$$\ddot{y} = 8y$$

$$y = A\mathrm{e}^{\sqrt{8}t} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t}$$

$$y(0) = 0 \qquad \text{ger } A = -B$$

$$\dot{y} = A\sqrt{8}\mathrm{e}^{\sqrt{8}t} - B\sqrt{8}\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t}$$

$$\dot{y}(0) = -0{,}2 \quad \text{ger } \sqrt{8}(A - B) = -0{,}2$$

$$\begin{cases} A = -B \\ \sqrt{8}(A - B) = -0{,}2 \end{cases}$$

$$-2\sqrt{8}B = -0{,}2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-0{,}2}{-2\sqrt{8}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{8}}$$

$$A = -\frac{0{,}1}{\sqrt{8}}$$

Alltså $y = -\frac{0{,}1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{\sqrt{8}t} + \frac{0{,}1}{\sqrt{8}}\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t} = \frac{0{,}1}{\sqrt{8}}(\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t} - \mathrm{e}^{\sqrt{8}t})$

Vid t = 0,1 s slås fältet av och kulan har då läget

$$y(0{,}1) = \frac{0{,}1}{\sqrt{8}}(\mathrm{e}^{-\sqrt{8}\cdot 0{,}1} - \mathrm{e}^{\sqrt{8}\cdot 0{,}1}) \approx -0{,}020268$$

och hastigheten

$$\dot{y} = \frac{0{,}1}{\sqrt{8}}(-\sqrt{8}e^{-\sqrt{8}t} - \sqrt{8}e^{\sqrt{8}t}) = -0{,}1(e^{-\sqrt{8}t} + e^{\sqrt{8}t})$$

$$\dot{y}(0{,}1) = -0{,}1(e^{-\sqrt{8}\cdot 0{,}1} + e^{\sqrt{8}\cdot 0{,}1}) \approx -0{,}208053$$

<u>Utan elektriskt fält</u>:

Vi får en ny differentialekvation och sätter i den t = 0 då fältet slås av.

$$m\ddot{y} = -ky \qquad y(0) = -0{,}020268 \quad \dot{y}(0) = -0{,}208053$$

$$\ddot{y} = -4y$$

$$y = C\sin 2t + D\cos 2t$$

$$\dot{y} = 2C\cos 2t - 2D\sin 2t$$

$$y(0) = -0{,}020268 \qquad \text{ger } D = -0{,}020268$$

$$\dot{y}(0) = -0{,}208053 \qquad \text{ger } 2C = -0{,}208053 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-0{,}208053}{2} \approx -0{,}10403$$

Alltså

$$y = -0{,}10403\sin 2t - 0{,}020268\cos 2t$$

Kulan är vid jämviktsläget då y = 0:

$$0 = -0{,}10403\sin 2t - 0{,}020268\cos 2t$$

$$\tan 2t = \frac{-0{,}020268}{0{,}10403}$$

$$2t = -0{,}19242 + n\pi$$

$$t = -0{,}09621 + n\frac{\pi}{2}$$

n = 1 ger $t = -0{,}09621 + \dfrac{\pi}{2} = 1{,}4746$

<u>Svar</u>: $t = 1{,}47\,\text{s}$

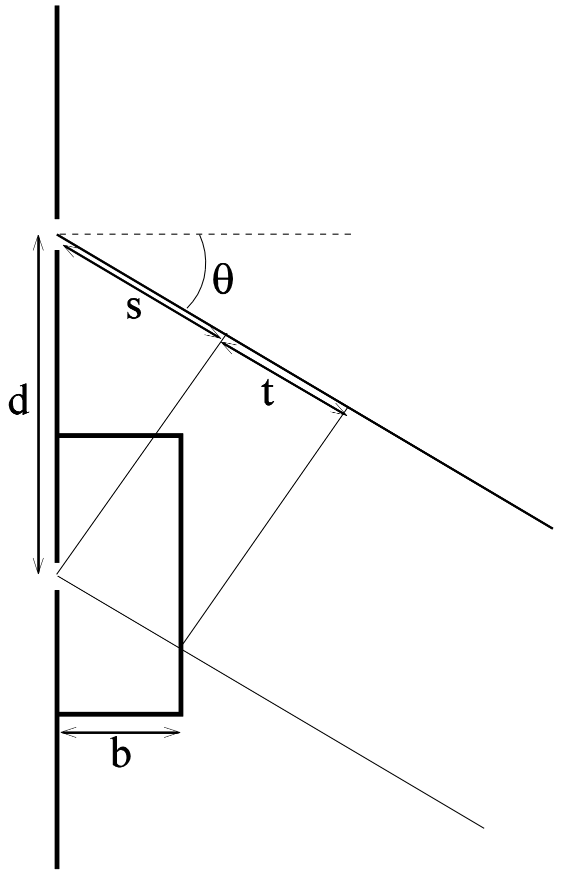
5) Vi lyser med en HeNe-laser, som har våglängden 633 nm, genom en dubbelspalt med spaltavståndet 5,00 μm. På en vägg 5,00 meter bakom spalten bildas ett diffraktionsmönster. Rakt bakom dubbelspalten, vi kallar detta x=0, får vi en lysande punkt, P_0. Symmetriskt runt den vid x=±63,8 cm hittar vi två andra maxima som vi betecknar P_1^+ och P_1^-. (Det finns även andra ljusa punkter längre bort från P_0, men vi bryr oss inte om dessa.) Vi placerar sedan en tunn glasskiva, med tjocklek 1,00 μm och med brytningsindex 1,50 direkt bakom den högra spaltöppningen.

a) Vid vilka x-koordinater ligger nu punkterna P_0 och P_1^+? P_1^+ är den punkt som ligger på höger sida om centrum. (Antag att vinkeln är så liten att ljusets väg genom glasskivan är lika med glasets tjocklek.)

b) Gör om beräkningen i a) utan att använda antagandet! (TIPS! Det är svårt att hitta en analytisk lösning så du måste använda en grafisk lösning eller en iterativ lösning)

Lösningsförslag:

a) För att få ett ljusmaximum på skärmen vid P_0 måste ljusstrålarna från dubbelspaltens öppningar mötas vid P_0 på skärmen och interferera konstruktivt. Eftersom avståndet till skärmen (L = 5,00 m) är mycket större än avståndet mellan spaltöppningarna (d = 5,00 μm) kommer de två strålarna att röra sig parallellt mot skärmen enligt nedanstående figur.



Enligt problemtexten ska vi anta att θ är så liten av att $t \approx b$ = 1,00 μm. Vi måste ta hänsyn till att den ena strålen går genom glas med brytningsindex n = 1,50 när vi tar fram ett uttryck för den optiska vägskillnaden mellan strålarna. Den optiska vägskillnaden kan skrivas

$$s + t - nt = d \sin\theta + t - nt$$

För att erhålla ett ljusmaximum måste den optiska vägskillnaden vara ett helt antal våglängder, $m\lambda$, där våglängden λ = 633 nm.

$$\sin\theta = \frac{m\lambda - t + nt}{d}$$

För punkten P_0 är m = 0.

$$\sin\theta = \frac{0 - 1{,}00 + 1{,}5 \cdot 1{,}00}{5{,}00} = 0{,}1$$

Detta ger $\theta = 5{,}74^\circ$ vilket innebär att strålarna träffar skärmen vid $x = L \cdot \tan\theta = 5{,}00 \cdot \tan 2{,}74^\circ = 0{,}50$ m.

För punkten P_1^+ är m = 1.

$$\sin\theta = \frac{0{,}633 - 1{,}00 + 1{,}5 \cdot 1{,}00}{5{,}00} = 0{,}2266$$

Detta ger $\theta = 13{,}10^\circ$ vilket innebär att strålarna träffar skärmen vid $x = 5{,}00 \cdot \tan 13{,}10^\circ = 1{,}16$ m.

Svar: Med de approximationer vi gjort får vi att P_0 hamnar vid x = 50 cm och P_1^+ vid x = 116 cm.

b) Vid en korrekt beräkning måste vi ta hänsyn till att den nedre strålen går snett genom glasplattan och att strålen bryts när den lämnar glasplattan. Detta visas i nedanstående figur. Utgångsvinkeln när strålen lämnar plattan är θ för att den ska vara parallell med den övre strålen medan infallsvinkeln betecknas θ_1. De två vinklarna är relaterade via Snells brytningslag, $\sin\theta = n \cdot \sin\theta_1$.

Den nedre strålen går sträckan u genom glaset. Från figuren får vi

$$u = \frac{b}{\cos\theta_1}$$

och

$$t = u \cdot \cos(\theta - \theta_1) = \frac{b}{\cos\theta_1} \cdot \cos(\theta - \theta_1)$$

Villkoret för att strålarna ska interferera konstruktivt på skärmen ges nu av

$$s + t - nu = m\lambda$$

$$d\sin\theta + \frac{b}{\cos\theta_1} \cdot \cos(\theta - \theta_1) - n\frac{b}{\cos\theta_1} = m\lambda$$

Ett trigonometriskt samband ger

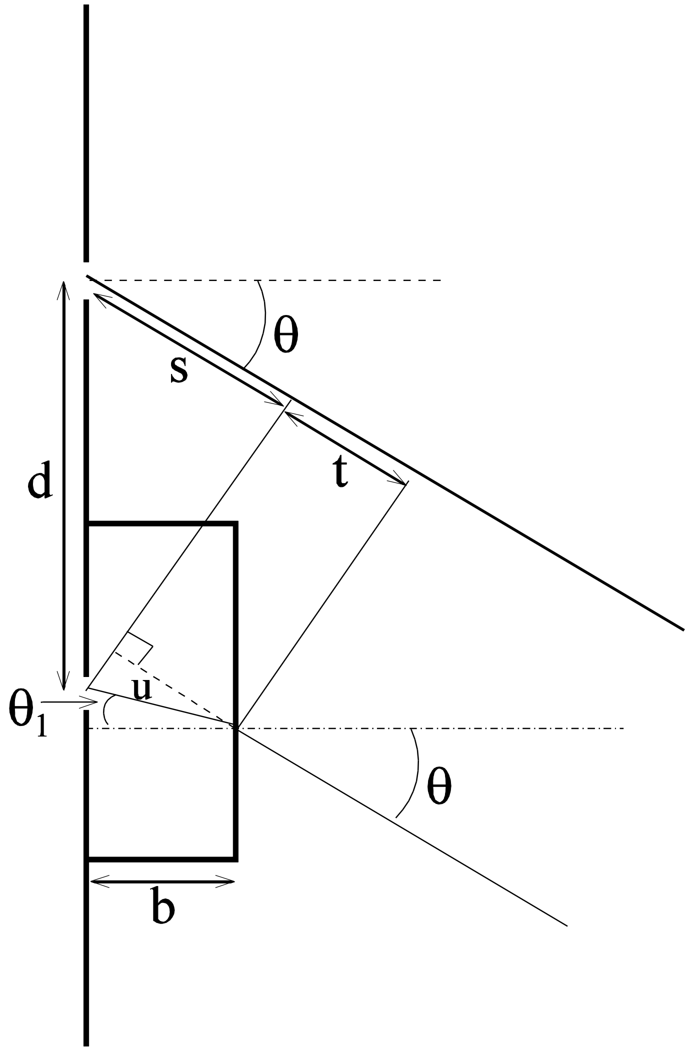
$$\cos(\theta - \theta_1) = \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1$$

Vilket ger

$$d\sin\theta + \frac{b}{\cos\theta_1} \cdot \cos\theta\cos\theta_1 - \frac{b}{\cos\theta_1} \cdot \sin\theta\sin\theta_1 - n\frac{b}{\cos\theta_1} = m\lambda$$

Använd Snells brytningslag för att ersätta θ_1 med θ.

$$\sin\theta_1 = \frac{\sin\theta}{n}$$



$$\cos\theta_1 = \sqrt{1-\sin^2\theta_1} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}$$

$$d\sin\theta + b\cos\theta - \frac{b\cdot\sin^2\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} - \frac{b\cdot n^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} = m\lambda$$

Denna ekvation går inte att lösa analytiskt utan det måste ske grafiskt på räknaren eller med iteration.

För m=0 får vi $\theta = 5{,}92^\circ$ vilket innebär att strålarna träffar skärmen vid $x = 5{,}00 \cdot \tan 5{,}92^\circ = 0{,}52$ m.
För m=1 får vi $\theta = 14{,}18^\circ$ vilket innebär att strålarna träffar skärmen vid $x = 5{,}00 \cdot \tan 14{,}18^\circ = 1{,}26$ m.

Svar: Vi får att P_0 hamnar vid x = 52 cm och P_1^+ vid x = 126 cm.