WALLENBERGS FYSIKPRIS

KVALIFICERINGS- OCH LAGTÄVLING
27 januari 2011

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. (a) Falltiden fås ur (positiv riktning nedåt)

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9{,}82}}\ \text{s} = 1{,}43\ \text{s}.$$

(b) Välj origo vid 3-meterssvikten och positiv riktning uppåt. Vi söker v_0 så att $s = -3{,}0$ m då $t = 1{,}43$ s, vilket ger oss ekvationen (utan enheter utskrivna)

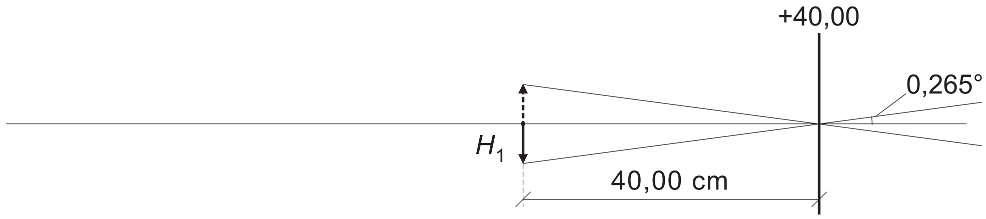
$$-3{,}0 = v_0 \cdot 1{,}43 - \frac{9{,}82 \cdot 1{,}43^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 4{,}90\ \text{m/s}.$$

(c) Vi betraktar första delen av hoppet, från svikt och upp till högsta läget. Välj positiv riktning uppåt. Läget då $v = 0$ fås ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-4{,}90^2}{2 \cdot (-9{,}82)}\ \text{m} = 1{,}23\ \text{m}.$$

Svar: (a) 1,4 s (b) 4,9 m/s (c) 1,2 m.

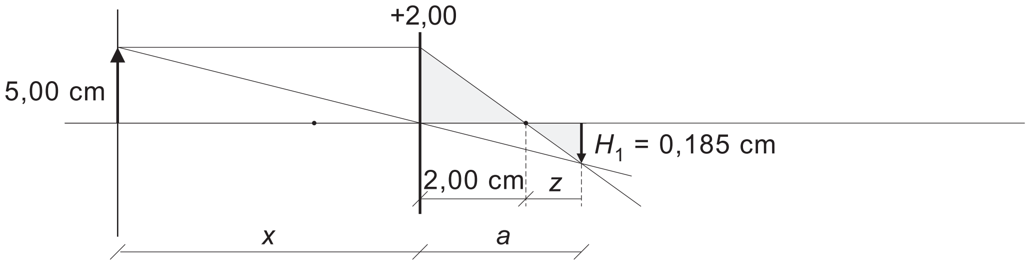
2. Solen avbildas först av +40,00 cm-linsen. Eftersom solen befinner sig långt bort kommer mellanbilden att vara belägen i linsens fokalplan. Strålgången visas schematiskt nedan.



Mellanbilden av solen har radien

$$H_1 = 40{,}00\ \text{cm} \cdot \tan 0{,}265° = 0{,}185\ \text{cm}.$$

Mellanbilden avbildas sedan av +2,00 cm-linsen på skärmen. Strålgången visas schematiskt nedan.



Likformiga trianglar i figuren ger

$$\frac{z}{2{,}00\text{ cm}} = \frac{0{,}185\text{ cm}}{5{,}00\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad z = 0{,}0740\text{ cm}.$$

Föremålsavståndet blir då $a = (2{,}00 + 0{,}0740)$ cm $= 2{,}07$ cm. Det andra paret av likformiga trianglar i figuren ger

$$\frac{x}{2{,}07\text{ cm}} = \frac{5{,}00\text{ cm}}{0{,}185\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad x = 56{,}1\text{ cm}.$$

Avståndet mellan linserna behöver vara $y = (40{,}00 + 2{,}07)$ cm $= 42{,}07$ cm.

Svar: $x = 56{,}1$ cm, $y = 42{,}07$ cm.

3. Musens emittans är

$$M = \varepsilon\sigma T^4 = 0{,}7 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 290^4\ \text{W/m}^2 = 281\ \text{W/m}^2$$

Den instrålade effekten vid ormögat blir $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot 281\ \text{W/m}^2 = 25\ \text{W/m}^2$. Ögat samlar upp effekten

$$25\ \text{W/m}^2 \cdot \pi \cdot (0{,}0015)^2\ \text{m}^2 = 1{,}79 \cdot 10^{-4}\ \text{W}.$$

Under 0,5 s mottar således ögat energimängden $1{,}79 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}5\ \text{J} = 8{,}9 \cdot 10^{-5}$ J från musen.

Byter vi ut musen mot omgivning så blir motsvarande energimängd

$$\frac{0{,}6 \cdot 280^4}{0{,}7 \cdot 290^4} \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{J} = 6{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

Den extra energimängd som ögat mottar när musen kommer in i synfältet är alltså

$$(8{,}9 - 6{,}7) \cdot 10^{-5}\ \text{J} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

Massan hos den del av värmenäthinnan som träffas av värmestrålningen är

$$0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot (0{,}0015)^2 \cdot 998\ \text{kg} = 7 \cdot 10^{-7}\ \text{kg}.$$

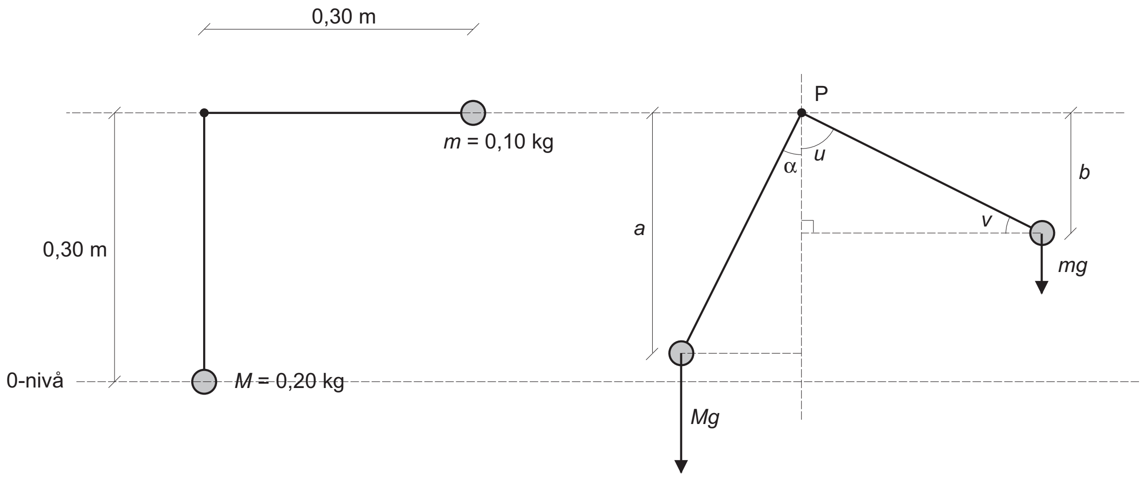
Temperaturhöjningen bör således bli

$$\Delta T = \frac{E}{cm} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}}{4180\ \mathrm{J/(kg \cdot K)} \cdot 7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{kg}} = 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}.$$

Svar: Temperaturhöjningen bör bli 8 mK, vilket är större än upplösningsförmågan.

4. Vi tar först reda på pendelns jämviktsläge. I detta läge är lägesenergin minimal och det är således när pendeln är i detta läge efter släpp som hastigheten är som störst.

Jämviktsläget är schematiskt ritat till höger i figuren nedan.



Eftersom $u = 90^\circ - \alpha$ så måste $v = \alpha$. Momentjämvikt med P som momentpunkt ger då

$$Mg \cdot 0{,}30\ \mathrm{m} \sin\alpha = mg \cdot 0{,}30\ \mathrm{m} \cos\alpha,$$

vilket, efter förkortning, ger ekvationen

$$\tan\alpha = \frac{m}{M} = \frac{0{,}10\ \mathrm{kg}}{0{,}20\ \mathrm{kg}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26{,}57^\circ.$$

Nu kan avstånden a och b i figuren bestämmas:

$$a = 0{,}30\ \mathrm{m} \cdot \cos 26{,}57^\circ = 0{,}268\ \mathrm{m}, \qquad b = 0{,}30\ \mathrm{m} \cdot \sin 26{,}57^\circ = 0{,}134\ \mathrm{m}.$$

Jämför vi nu systemets energi precis efter släpp och när vikterna har som störst fart (v m/s) så får vi med energiprincipen ekvationen

$$0{,}10 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}30 = \frac{(0{,}10 + 0{,}20)v^2}{2} + 0{,}20 \cdot 9{,}82 \cdot (0{,}30 - 0{,}268) + 0{,}10 \cdot 9{,}82 \cdot (0{,}30 - 0{,}134),$$

som har lösningen $v = 0{,}68$.

Svar: 0,68 m/s

5. (a) Om vi antar att den observerade ljusstyrkan är proportionell mot arean av den cirkelskiva som är vänd mot oss så bör

$$\frac{\pi b^2}{\pi B^2} = 0{,}016,$$

där b är planetens radie och B är stjärnans radie. Vi får alltså

$$b = \sqrt{0{,}016 \cdot B^2} = \sqrt{0{,}016 \cdot (1{,}10 \cdot 10^9)^2}\ \text{m} = 1{,}4 \cdot 10^8\ \text{m}.$$

(b) Stjärnan och planeten rör sig runt O med samma omloppstid och på ett sådant sätt att de alltid ligger på en rät linje genom O. De påverkas båda av en gravitationskraft vars storlek är

$$F = G\frac{Mm}{(R+r)^2},$$

där R är stjärnans banradie och r är planetens banradie. Eftersom stjärnans banradie

$$R = \frac{VT}{2\pi} = \frac{230 \cdot 1{,}09 \cdot 24 \cdot 3\,600}{2\pi}\ \text{m} = 3{,}45 \cdot 10^6\ \text{m}$$

är mycket mindre än stjärnans radie så måste $R \ll r$ (eftersom planetens banradie måste vara större än stjärnans radie). Den ömsesidiga gravitationskraften kan därför skrivas

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \tag{1}$$

Newtons andra lag för stjärnan respektive planeten ger

$$F = M\frac{V^2}{R}, \qquad F = m\frac{v^2}{r}.$$

Sätter vi dessa samband lika får vi

$$\frac{MV^2}{R} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{r}{R} \cdot \frac{V^2}{v^2}. \tag{2}$$

Men stjärnans och planetens omloppstider är lika, vilket ger

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \frac{v}{V}.$$

Insättning i (2) ger

$$\frac{m}{M} = \frac{v}{V} \cdot \frac{V^2}{v^2} = \frac{V}{v}, \tag{3}$$

vilket skulle visas.

(c) Newtons andra lag för stjärnan, med gravitationskraften (1), ger

$$G\frac{Mm}{r^2} = M\frac{V^2}{R}. \tag{4}$$

För att få r uttryckt i R använder vi samband (3) som ger

$$\frac{m}{M} = \frac{V}{v} = \frac{\frac{2\pi R}{T}}{\frac{2\pi r}{T}} = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{M}{m} R.$$

Insättning av detta i (4) ger

$$G \frac{Mm \cdot m^2}{M^2 R^2} = M \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad m = \left(\frac{V^2 M^2 R}{G} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Insättning av värden ger

$$m = \left(\frac{230^2 \cdot (2{,}57 \cdot 10^{30})^2 \cdot 3{,}45 \cdot 10^6}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ kg} = 2{,}62 \cdot 10^{27} \text{ kg}.$$

Exoplanetens densitet är

$$\rho = \frac{m}{\frac{4\pi b^3}{3}} = \frac{2{,}62 \cdot 10^{27}}{\frac{4\pi \cdot (1{,}4 \cdot 10^8)^3}{3}} \text{ kg/m}^3 = 0{,}23 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Svar: (a) Exoplanetens radie $1{,}4 \cdot 10^8$ m (c) Massan $2{,}6 \cdot 10^{27}$ kg, densiteten $0{,}23 \cdot 10^3$ kg/m^3.

6. (a) Inducerad spänning-tid-diagrammet visar i princip flödesändringen i spolen per tidsenhet (eftersom $e = N\frac{d\Phi}{dt}$). Från flödeslinjebilden kan vi se att denna flödesändring bör vara maximal då magnetens framkant respektive bakkant passerar spolen (eftersom det först efter att magnetens framkant passerat spolen kommer att finnas flödeslinjer i spolen som är riktade uppåt).

Eftersom

$$e(t) = N \frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \frac{1}{N} \int_{t_1}^{t_2} e(t)\, dt$$

så kan flödet från magnetens främre kortsida fås genom att integrera den inducerade spänningen $e(t)$ fram till första toppen, det vill säga då $t = 3{,}235$ s. Numerisk integrering i diagrammet ger

$$\Phi \approx \frac{1}{320} \cdot \frac{0{,}35 \text{ V} \cdot (3{,}235 - 3{,}15) \text{ s}}{2} = 4{,}65 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}.$$

Flödestätheten utanför kortsidan är

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{4{,}65 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}}{0{,}020 \cdot 0{,}008 \text{ m}^2} = 0{,}29 \text{ T}.$$

(b) Från e-t-diagrammet kan vi utläsa att det tar $t = (3{,}285 - 3{,}235)$ s $= 0{,}050$ s mellan det att magnetens framkant och bakkant passerar spolen. Magneten har då rört sig $s = 0{,}094$ m. Rörelseformlerna ger

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} t$$

och

$$v_2 = v_1 + at.$$

Ur dessa två samband fås

$$v_1 = \frac{s}{t} - \frac{at}{2} = \left(\frac{0{,}094}{0{,}050} - \frac{9{,}82 \cdot 0{,}050}{2} \right) \text{ m/s} = 1{,}63 \text{ m/s}$$

och

$$v_2 = \frac{s}{t} + \frac{at}{2} = \left(\frac{0{,}094}{0{,}050} + \frac{9{,}82 \cdot 0{,}050}{2} \right) \text{ m/s} = 2{,}13 \text{ m/s},$$

där vi antagit att magneten faller fritt, så att $a = 9{,}82$ m/s^2.

(c) Experimentellt: Enligt beräkningarna ovan och avläsning i diagrammet får vi

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2{,}13 \text{ m/s}}{1{,}63 \text{ m/s}} = 1{,}31 \qquad \text{och} \qquad -\frac{e_2}{e_1} = -\frac{-0{,}46 \text{ V}}{0{,}35 \text{ V}} = 1{,}31.$$

Överensstämmelsen är alltså god.

Teoretiskt: Låt x vara det vertikala avståndet från spolens plan till magnetens framkant räknat från den tidpunkt då framkanten passerar spolen. Då är $x = 0$ när magnetens framkant passerar spolen och $x = 94$ mm när bakkanten passerar. Flödet i spolen kan då skrivas $\Phi(t) = \Phi(x(t))$ och induktionslagen ger

$$e = N\frac{d\Phi}{dt} = N\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = N\frac{d\Phi}{dx} \cdot v. \tag{5}$$

Här är $\frac{d\Phi}{dx}$ flödesändringen per längdenhet i spolen. När $x = 0$ är denna lika med flödesändringen per längdenhet (i magnetens längdriktning) vid magnetens framkant, och när $x = 94$ mm är $\frac{d\Phi}{dx}$ lika med flödesändringen per längdenhet vid magnetens bakkant.

Om vi använder (5) för att teckna uttryck för den inducerade spänningen vid de tidpunkter då magnetens framkant respektive bakkant passerar spolen får vi

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{N\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 \cdot v_2}{N\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_1 \cdot v_1} = -\frac{v_2}{v_1}, \tag{6}$$

eftersom

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_1 = -\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2.$$

Det senare gäller eftersom vi i flödeslinjebilden kan se att magnetfältet är helt symmetriskt; fältet vid nordänden ser likadant ut som vid sydänden förutom att flödeslinjerna går åt motsatt håll. Omflyttning i (6) ger

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{e_2}{e_1},$$

vilket skulle visas.