The 43rd International Physics Olympiad — Theoretical Competition

Tartu, Estonia — Tuesday, July 17th 2012

- Skrivtiden är 5 timmar, med 3 uppgifter om totalt 30 poäng.
- **Du får inte öppna kuvertet med uppgiftstexterna förrän ljudsignalen indikerar starten på tävlingen (tre korta signaler).**
- **Du får inte lämna din plats utan tillstånd.** Behöver du hjälp eller besöka toaletten vifta då med någon av flaggorna ("HELP" eller "TOILET") ovanför skrivplatsens väggar till dess assistans anländer.
- **Dina svar måste uttryckas i de färgade storheterna**, och får också innehålla fundamentala konstanter om så behövs. Om t.ex. lådans höjd är a och dess bredd b, kan a men inte b användas i svaret. Färgade storheter i en deluppgift får bara användas i svaret till deluppgiften, medan färgade storheter i introduktionstexten får användas i övrigt.
- Använd bara framsidan av varje ark.
- Till varje uppgift finns **särskilda lösningsark** som är numrerade i överkanten. Arken ska användas i nummerordning. **Ange alltid vilken problemdel och fråga det gäller.** Ange också dina svar i rutorna på **svarsarken**. Det finns även arbetsark (kladdpapper) för sådant du inte vill ha bedömt. Finns beräkningar på lösningsarken som du inte heller vill ha bedömda kan du korsa över dessa.
- När du behöver extra papper är det bara att vifta med **help**-flaggan och sedan ange vilken uppgift det gäller.
- På lösningsarken ska du skriva ner det du tycker behövs för att man ska kunna förstå din lösning. Du ska använda **så lite text som möjligt** och främst redovisa med ekvationer, tal, symboler och diagram.
- En enkel ljudsignal indikerar att 30 min av tiden återstår; därefter kommer en dubbel ljudsignal när 5 min återstår och en trippelsignal indikerar att skrivtiden är slut. **Nu måste du omedelbart sluta** och lägga alla dina papper i kuvertet. **Du få inte ta med några papper ur rummet.** Är du färdig tidigare är det bara att vifta med någon flagga.

Problem T1. Fokus på skisser *(13 poäng)*

Part A. Ballistik *(4,5 poäng)*

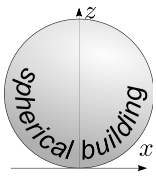
En boll kastas med begynnelsefarten v_0 och rör sig i ett homogent tyngdkraftfält i $x-z$-planet. x-axeln är horisontell, medan z-axeln är vertikal och antiparallell mot tyngdaccelerationen g; bortse från luftmotståndet.

i. (0,8 p) Genom att variera kastvinkeln för en boll som kastas med fix begynnelsefart v_0 från origo, kan bollen fås att nå mål inom ett område givet av

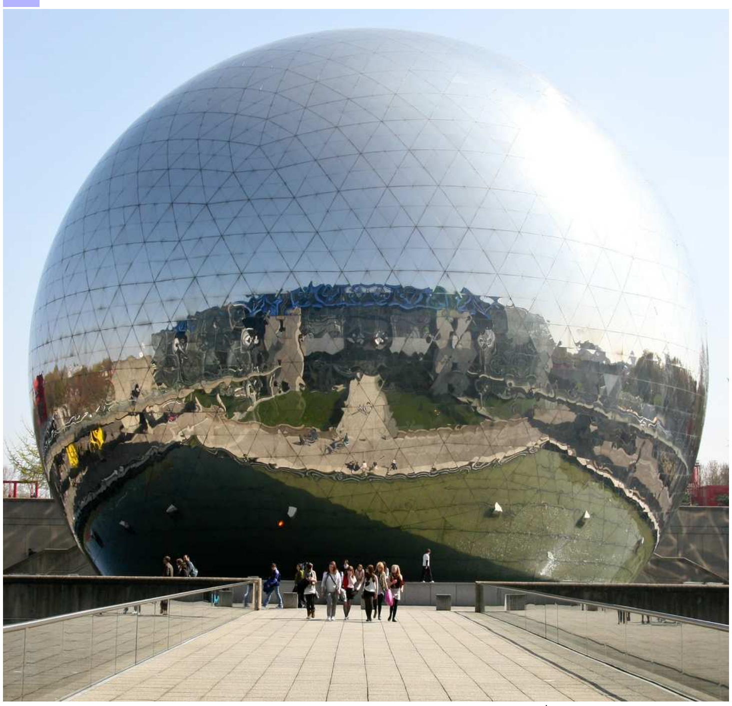
$$z \leq z_0 - kx^2;$$

du får använda detta utan bevis. Ange ett uttryck för konstanterna z_0 och k.

ii. (1,2 p) Utkastpunkten kan nu väljas fritt i marknivå, $z = 0$, och utkastvinkeln kan likaså väljas fritt; målet är att träffa högsta punkten på en sfärisk byggnad med radien R (se fig.) med lägsta möjliga begynnelsefart v_0 (utan att bollen studsar på byggnaden innan den når målet). Skissa kvalitativt utseendet på bollens optimala bana (använd den därför avsedda rutan på svarsarket). Notera att poäng ges enbart för skissen.



iii. (2,5 p) Vilken är den minsta kastfart v_{min} som behövs för att träffa högsta punkten på en sfärisk byggnad med radien R?



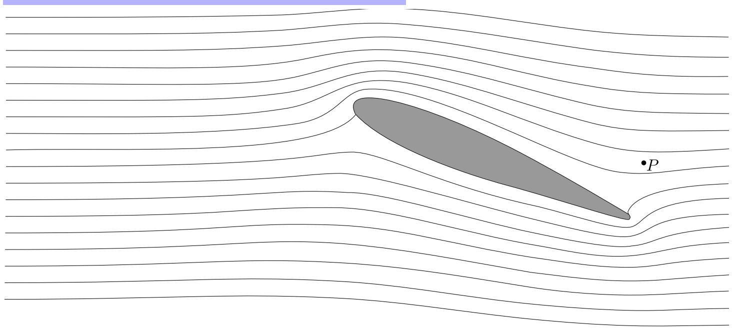
La Géode, Parc de la Villette, Paris. Foto: katchooo/flickr.com

Part B. Luftflödet kring en vinge *(4 poäng)*

För denna deluppgift kan följande information vara användbar. För ett gas- eller vätskeflöde i ett rör, gäller längs en flödeslinje att $p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ konst., under antagande att farten v är mycket mindre än ljudfarten. Här är ρ densiteten, h höjden, g tyngdaccelerationen och p det hydrostatiska trycket. Strömlinjer definieras som banorna hos de strömmande partiklarna. Notera att termen $\frac{1}{2}\rho v^2$ kallas dynamiskt tryck.

I figuren nedan visas en flygplansvinge tillsammans med strömlinjerna för luftflödet kring vingen, i vingens referenssystem.

Antag att (a) luftflödet är enbart tvådimensionellt (dvs. hastighetsvektorn ligger i figurplanet); (b) strömlinjemönstret är oberoende av flygplanets fart; (c) det är vindstilla; (d) det dynamiska trycket är mycket mindre än atmosfärstrycket $p_0 = 1.0 \times 10^5\,\text{Pa}$. Du kan använda en linjal för att göra mätningar i figuren på svarsarket.



i. (0,8 p) Om flygplanets fart relativt marken är $v_0 = 100\,\text{m/s}$, vilken är luftens fart v_P i punkten P (markerad i fig.) relativt marken?

ii. (1,2 p) När den relativa luftfuktigheten är hög, bildas en strimma av små vattendroppar bakom vingen, när flygplanets fart relativt marken stiger över ett visst kritiskt värde, v_{crit}.

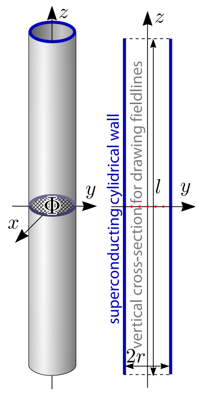
Dropparna bildas i en viss punkt Q. Markera punkten Q i fig. på svarsarket. Förklara kvalitativt (med formler och så lite text som möjligt) hur du bestämde denna position.

iii. (2 p) Uppskatta den kritiska farten v_{crit} baserat på följande data: relativa luftfuktigheten är $r = 90\%$, luftens värmekapacitet vid konstant tryck är $c_p = 1.00 \times 10^3\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$, trycket hos mättad vattenånga: $p_{sa} = 2.31\,\text{kPa}$ vid den ostörda luftens temperatur $T_a = 293\,\text{K}$, och $p_{sb} = 2.46\,\text{kPa}$ vid $T_b = 294\,\text{K}$. Beroende på vilka approximationer du gör kan du ev. behöva värmekapaciteten hos luft vid konstant volym $c_V = 0.717 \times 10^3\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$. Notera att relativ fuktighet definieras som kvoten mellan ångtrycket och dess maximala värde.

Part C. Magnetiska strån *(4,5 poäng)*

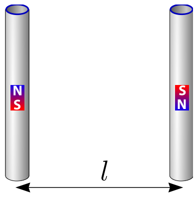
Betrakta ett cylindriskt rör av ett supraledande material. Rörets längd är l och innerradien är r; med $l \gg r$. Rörets mittpunkt sammanfaller med origo, och dess längdaxel med z-axeln. I rörets mitt, $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$, finns ett magnetiskt flöde Φ.

Genom ett supraledande material kan inga magnetiska fältlinjer passera – magnetfältet måste vara noll där.



i. (0,8 p) I den därför avsedda rutan på svarsarket, skissa de fem magnetiska fältlinjer som passerar genom de fem röda punkterna som markerats på rörets axiella tvärsnitt.

ii. (1,2 p) Finn den vertikala spännkraften T i mitten av röret (dvs. kraften mellan rörets två halvor, med $z > 0$ resp. $z < 0$).

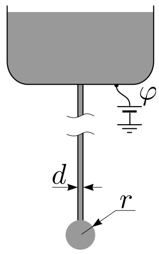


iii. (2,5 p) Vi inför nu ett andra rör, identiskt till och parallellt med det första. Det andra röret har motsatt riktning på det magnetiska fältet, och dess mittpunkt ges av $y = l, x = z = 0$ (så att rören bildar motsatta sidor av en kvadrat). Bestäm den magnetiska växelverkanskraften F mellan de två rören.

Problem T2. Kelvins vattendroppsapparat *(8 poäng)*

Följande fakta om ytspänning kan visa sig användbara för denna uppgift. För molekylerna i en vätska är positionerna vid begränsningsytan mot luft energimässigt mindre fördelaktiga än positioner i det inre av vätskan. Därför tillskrivs ytan en s.k. ytenergi $U = \sigma S$, där S är ytans area och σ vätskans ytspänningskoefficient. Dessutom drar två delar av ytan i varandra med en kraft $F = \sigma l$, där l är längden av den räta linje som separerar delarna.

Ett långt metallrör med innerdiameteren d hänger rakt ner, och vatten droppar långsamt från öppningen i nedre änden, se figur. Utgå ifrån att vatten är elektriskt ledande, att det har ytspänningen σ och att det har densiteten ρ. Antag också att $d \ll r$. Här är r radien på den droppe som hänger i röret, och den växer långsamt allt eftersom tiden går, tills den slutligen lossnar och faller fritt med accelerationen g.



Part A. Ett rör *(4 poäng)*

i. (1,2 p) Bestäm den radie $r_{\max}$ som droppen har precis innan den lossnar från röret.

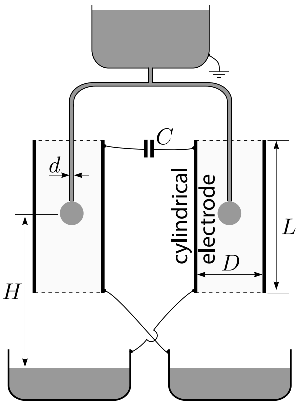
ii. (1,2 p) Röret har den elektriska potentialen φ om man antar att potentialen är noll oändligt långt bort. Bestäm den laddning Q som en droppe har när dess radie är r.

iii. (1,6 p) Antag i denna delfråga att r är konstant, medan φ långsamt ökas. Droppen blir då instabil och bryts upp i smådelar när det hydrostatiska trycket inne i droppen blir mindre än atmosfärstrycket. Bestäm den kritiska spänningen $\varphi_{\max}$ då detta inträffar.

Den första droppen som faller kommer att ha en mikroskopisk laddning, och förorsaka en obalans mellan de två sidornas laddningar, och därmed en spänning över kondensatorn.

Part B. Två rör *(4 poäng)*

En apparat som kallas "Kelvins vattendroppsapparat" består av två rör (likadana som de som beskrivits i Del A), som kopplats samman med en T-koppling, se figur. De båda rörändarna har placerats i centrum av varsin cylindrisk elektrod (med höjd L och diameter D, $L \gg D \gg r$). För båda rören är dropphastigheten n droppar per tidsenhet. Dropparna faller från höjden H ner i två ledande behållare under röröppningarna, och dessa är korskopplade till elektroderna så som visas i figuren. Elektroderna har också kopplats samman via en kondensator med kapacitansen C. Det finns ingen nettoladdning i systemet av behållare och elektroder. Notera att den övre vätskebehållaren är jordad.



i. (1,2 p) Uttryck, i termer av $r_{\max}$ (från Del A-i), beloppet av den laddning Q_0 som en droppe har som lämnar röret i det ögonblick då kondensatorns laddning är q. Bortse från den effekt som beskrevs i Del A-iii.

ii. (1,5 p) Bestäm hur q beror av tiden t genom att anta att vi har en kontinuerlig funktion $q(t)$ där $q(0) = q_0$.

iii. (1,3 p) Droppapparaten kan sluta fungera beroende på den effekt som behandlades i Del A-iii. Dessutom finns det en maximal gränsspänning $U_{\max}$ mellan elektroderna som bestäms av den elektrostatiska repulsionen mellan en droppe och behållaren nedanför den. Bestäm $U_{\max}$.

Problem T3. En stjärna i vardande *(9 poäng)*

I en enkel modell som beskriver bildandet av en stjärna antas följande. Ett tunt sfäriskt moln i vila, med radien r_0 och massan m, börjar dras samman under sin egen gravitation. Den omgivande interstellära materien, som antas ha en betydligt lägre densitet, har temperaturen T_0. Gasen kan antas ideal. Molnets genomsnittliga molmassa är μ och dess adiabatiska index är $\gamma > \frac{4}{3}$. Antag vidare att $G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, där R är universella gaskonstanten och G är gravitationskonstanten.

i. (0,8 p) Trots att densiteten ökar kommer gasmolnet att vara transparent under den mesta tiden, varför all värme som bildas omedelbart avges till omgivningen. Med vilken faktor (n) kommer trycket i gasmolnet att ha ökat när radien minskat till hälften ($r_1 = 0,5r_0$), givet att densiteten antas likformig?

ii. (1 p) Gör en uppskattning av den tid det tar för radien att minska från r_0 till $r_2 = 0,95r_0$. Försumma här gravitationsfältets variation för en fallande gaspartikel.

iii. (2,5 p) Antag att trycket förblir försumbart. Ange ett uttryck för tiden det tar för molnet att krympa från r_0 till en betydligt mindre radie, med hjälp av Keplers lagar för elliptiska banor.

iv. (1,7 p) När molnet krympt till radien $r_3 \ll r_0$ har densiteten ökat såpass att molnet inte längre släpper genom värmestrålningen. Beräkna den värmemängd Q som avgetts till omgivningen när gasmolnet krympt från r_0 till r_3

v. (1 p) Värmestrålningen till omgivningen kan försummas för radier mindre än r_3. Ange ett uttryck för hur temperaturen T beror på molnets radie $r < r_3$.

vi. (2 p) Till sist kan vi inte längre försumma effekten av att trycket ökar, och att molnet därför slutar krympa vid radien $r = r_4$ (där $r_4 \ll r_3$). Vi kan fortsatt försumma värmestrålningen till omgivningen, men temperaturen blir inte tillräckligt hög för att starta en fusionsprocess. Visserligen är inte trycket längre likformigt i en sådan s.k. protostjärna, men en överslagsberäkning med ungefärliga numeriska data kan ändå göras. *Uppskatta* den slutliga radien r_4 och temperaturen T_4.

Problem T1. Fokus på skisser *(13 poäng)*

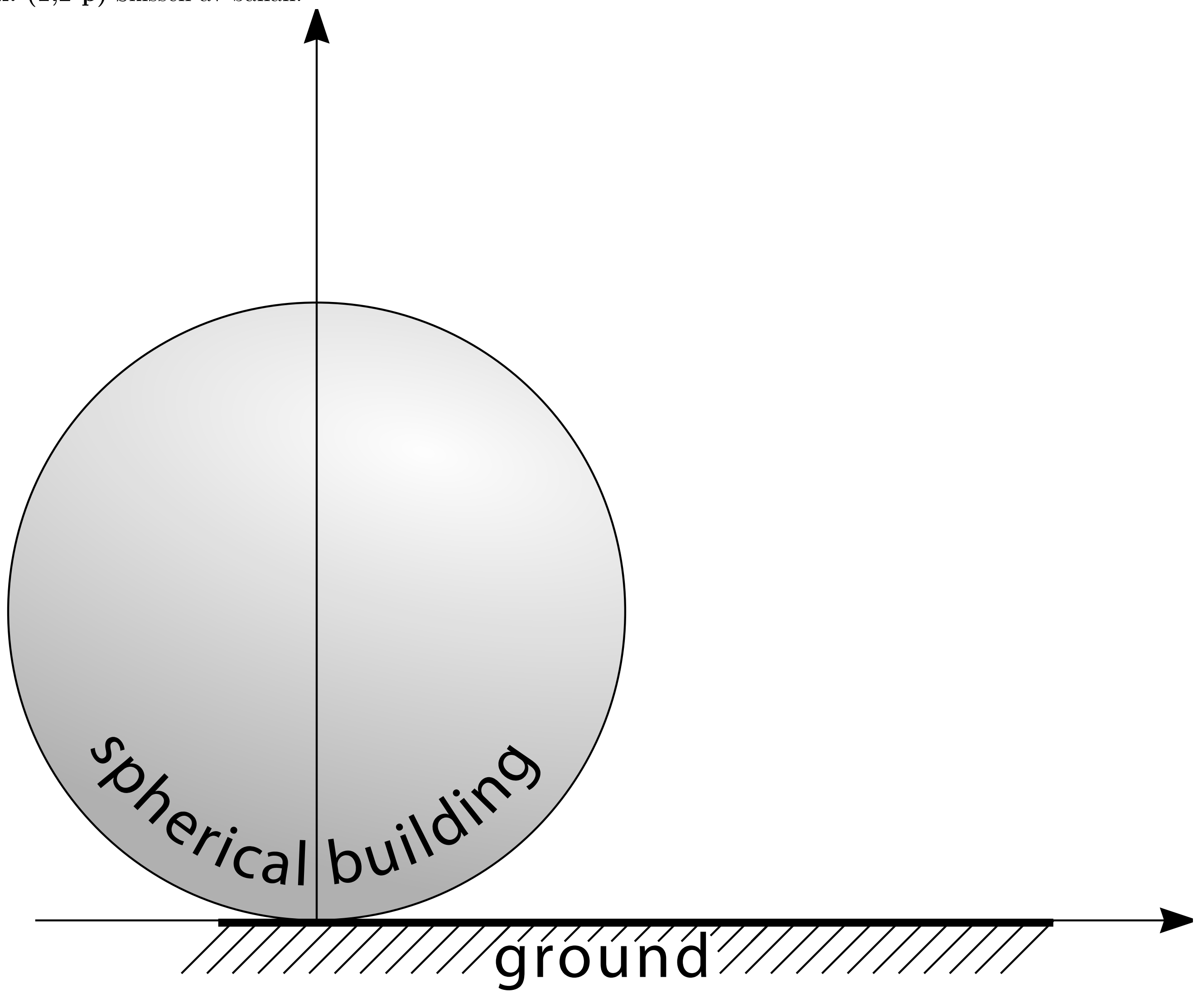
Part A. Ballistik *(4,5 poäng)*

i. (0,8 p)

$z_0 =$

$k =$

ii. (1,2 p) Skissen av banan:



iii. (2,5 p)

$v_{\min} =$

ANSWER SHEET

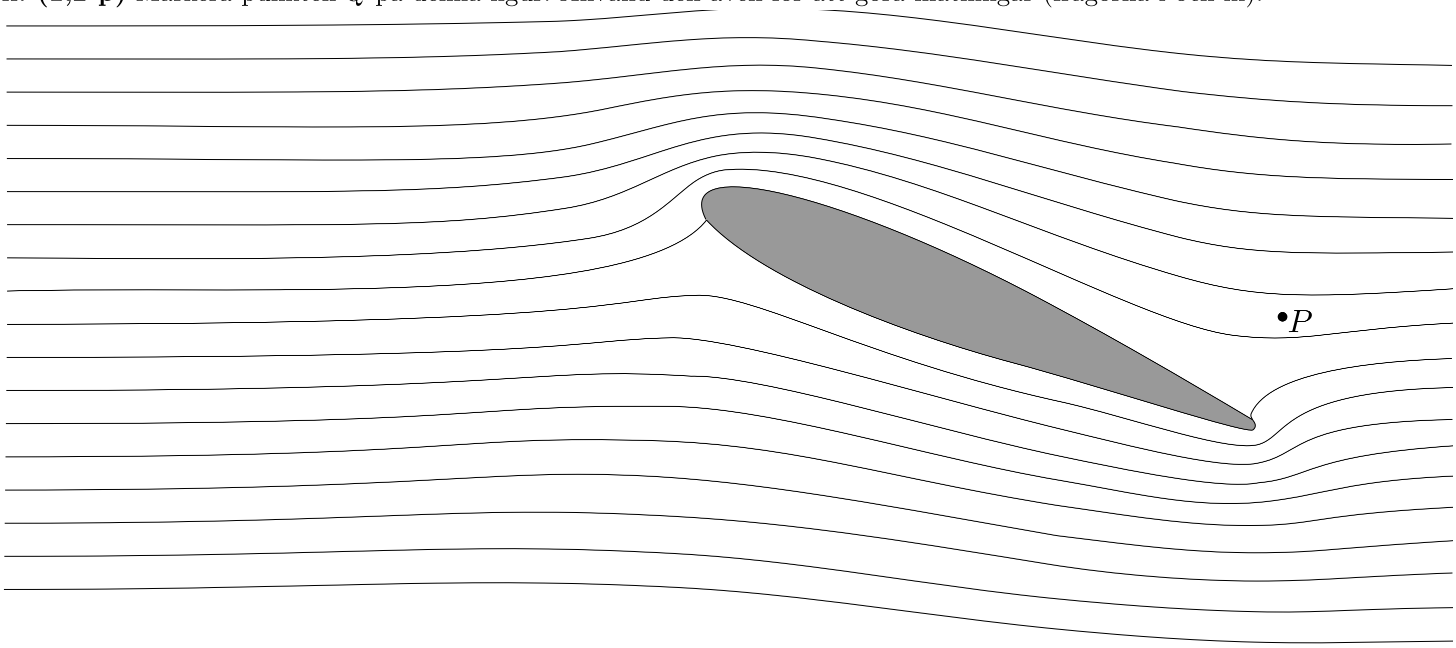
Problem 1

Part B. Luftflödet kring en vinge *(4 poäng)*

i. (0,8 p)

$v_P =$

ii. (1,2 p) Markera punkten Q på denna figur. Använd den även för att göra mätningar (frågorna i och iii).



Formler som motiverar valet av punkt Q:

iii. (2,0 p)

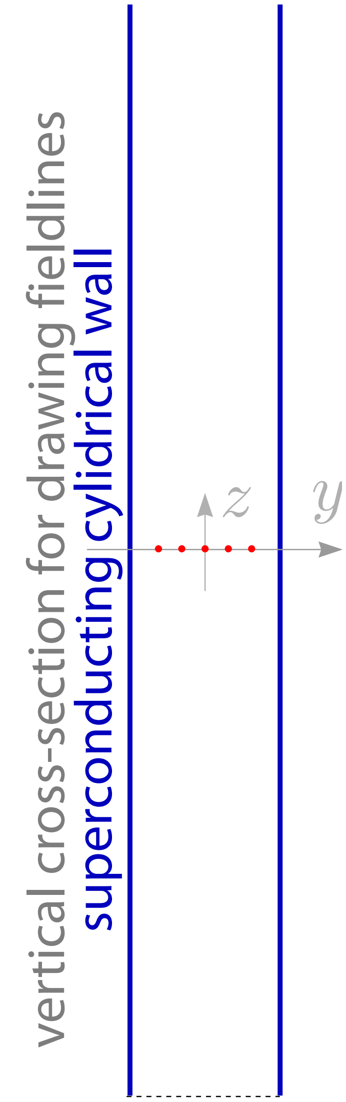
Formel: $v_{\text{crit}} =$

Numeriskt värde: $v_{\text{crit}} \approx$

Part C. Magnetiska strån ***(4,5 poäng)***

i. (0,8 p)

Skissa här fem magnetiska flödeslinjer.



ii. (1,2 p)

$T =$

iii. (2,5 p)

$F =$

Problem T2. Kelvins droppapparat *(8 poäng)*

Part A. Ett rör *(4 poäng)*

i. (1,2 p)

$r_{\max} =$

ii. (1,2 p)

$Q =$

iii. (1,6 p)

$\varphi_{\max} =$

Part B. Två rör *(4 poäng)*

i. (1,2 p)

$Q_0 =$

ii. (1,5 p)

$q(t) =$

iii. (1,3 p)

$U_{\max} =$

Problem T3. En stjärna i vardande *(9 poäng)*

i. (0,8 p)

$n =$

ii. (1 p)

$t_2 \approx$

iii. (2,5 p)

$t_{r\to 0} =$

iv. (1,7 p)

$Q =$

v. (1 p)

$T(r) =$

vi. (2 p)

$r_4 \approx$

$T_4 \approx$