WALLENBERGS FYSIKPRIS

FINALTÄVLING
4 maj 2013

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. (a) Aktiviteten efter ett dygn är

$$A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 360 \text{ Bq} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1,0}{3,8}} = 300 \text{ Bq}.$$

(b) Vi behöver ett samband mellan antalet kärnor $N(t)$ och aktiviteten $A(t)$. Antalet kärnor kan skrivas

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 e^{-kt},$$

där T är halveringstiden och $k = \frac{\ln 2}{T}$. Aktiviteten är sönderfallshastigheten, det vill säga

$$A(t) = -N'(t) = -(-k)N_0 e^{-kt} = kN(t).$$

Alltså är det så att $A(t) = kN(t)$, där $k = \frac{\ln 2}{T}$. Antalet kärnor är således

$$N = \frac{A}{k} = \frac{200}{\frac{\ln 2}{3,8 \cdot 24 \cdot 3600}} = 94,7 \cdot 10^6.$$

Dessa kärnor har massan $94,7 \cdot 10^6 \cdot 222 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg $= 3,5 \cdot 10^{-17}$ kg $= 3,5 \cdot 10^{-14}$ g.

(c) Vid jämvikt gäller att "inläckaget = aktiviteten". Inläckaget är (de läckande ytornas totala area är 175 m^2)

$$250 \text{ kärnor/}(\text{s} \cdot \text{m}^2) \cdot 175 \text{ m}^2 = 43\,750 \text{ kärnor/s}.$$

Aktiviteten i 1,0 m^3 luft är då (rummets volym är 125 m^3)

$$\frac{43\,750}{125} \text{ Bq} = 350 \text{ Bq}.$$

(d) Varje sekund avlägsnas andelen

$$\frac{4,0}{125} \Big/ 3\,600 = 8,9 \cdot 10^{-6}$$

av ^{222}Rn-kärnorna med hjälp av ventilationen.

Vid jämvikt är "inläckaget = aktiviteten + bortförseln via ventilationen". Om antalet ^{222}Rn-kärnor i 1,0 m^3 luft vid jämvikt är N_j så ger detta ekvationen (enheter ej utskrivna)

$$350 = N_j \cdot k + 8{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot N_j,$$

där som tidigare $k = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{3{,}8 \cdot 24 \cdot 3\,600}$. Omskrivning ger

$$350 = N_j \cdot k + \frac{8{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot N_j \cdot k}{k},$$

eller (det gäller ju att aktiviteten $A = kN$)

$$350 = A_j + \frac{8{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot A_j}{k},$$

vilket ger $A_j = 67$ Bq.

Svar: (a) 300 Bq (b) $3{,}5 \cdot 10^{-14}$ g (c) 350 Bq (d) $8{,}9 \cdot 10^{-6}$, 67 Bq.

2. (a) Antag att luftmotståndet är försumbart (huruvida detta är ett rimligt antagande undersöks i uppgift c). Antag vidare att accelerationen är 9,8 m/s^2 (egentligen är accelerationen en faktor $(673/676)^2$ respektive $(673/674)^2$ mindre, men denna effekt är försumbar i sammanhanget).

Ljudhastigheten avläses i diagrammet till 302 m/s respektive 314 m/s (varierar inte så mycket med höjden så eventuell förändring på grund av att höjden ändras försummas). Falltiden för Kittinger fås ur

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{302}{9{,}8}\ \text{s} = 31\ \text{s}.$$

För Baumgartner är motsvarande falltid $\frac{314}{9{,}8}$ s $= 32$ s. Kittingers fallsträcka fås ur

$$2as = v^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2}{2a} = \frac{302^2}{2 \cdot 9{,}8}\ \text{m} = 4{,}7 \cdot 10^3\ \text{m}.$$

Motsvarande fallsträcka för Baumgartner är $\frac{314^2}{2 \cdot 9{,}8}$ m $= 5{,}0 \cdot 10^3$ m.

(b) Lyftkraften på en ballong är

$$F_l = \rho_{\text{luft}} V g,$$

där ρ_{luft} är omgivande lufts densitet och V ballongens volym. Lyftkraften på Kittingers ballong på 31 kilometers höjd var

$$F_l = 0{,}013 \cdot 1{,}3 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}305^3 \cdot 9{,}8\ \text{N} = 14 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

Motsvarande lyftkraft på Baumgartners ballong var

$$F_l = 0{,}004 \cdot 1{,}3 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 0{,}305^3 \cdot 9{,}8\ \text{N} = 43 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

Heliumet i ballongen har massan $m = \rho_{\mathrm{He}} V$ så dess tyngd är $F_{\mathrm{He}} = \rho_{\mathrm{He}} V g$. Nettolyftkraften på en ballong är således

$$F_{\mathrm{l,netto}} = F_{\mathrm{l}} - F_{\mathrm{He}} = \rho_{\mathrm{luft}} V g - \rho_{\mathrm{He}} V g = \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{luft}}}\right) \rho_{\mathrm{luft}} V g = \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{luft}}}\right) F_{\mathrm{l}}. \qquad (1)$$

Vi behöver bestämma kvoten $\frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{luft}}}$. Allmänna gaslagen ger att $\frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$. Multiplikation med molmassan M ger

$$\rho = \frac{Mn}{V} = \frac{Mp}{RT}.$$

Om trycket och temperaturen är lika är alltså densiteten proportionell mot molmassan. Mätetalet för molmassa (i g/mol) är detsamma som mätetalet för molekylmassa (i u) så vi får

$$\frac{\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{luft}}} = \frac{M_{\mathrm{He}}}{M_{\mathrm{luft}}} = \frac{4}{0{,}80 \cdot 28 + 0{,}20 \cdot 32} = 0{,}14.$$

Insättning av värden i uttrycket för nettolyftkraft (1) ger nu för Kittinger respektive Baumgartner

$$F_{\mathrm{l,netto}} = (1 - 0{,}14) \cdot 14 \cdot 10^3 \text{ N} = 12 \cdot 10^3 \text{ N},$$

$$F_{\mathrm{l,netto}} = (1 - 0{,}14) \cdot 43 \cdot 10^3 \text{ N} = 37 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Sökta massorna är $\frac{12 \cdot 10^3}{9{,}8}$ kg $= 1{,}2 \cdot 10^3$ kg respektive $\frac{37 \cdot 10^3}{9{,}8}$ kg $= 3{,}8 \cdot 10^3$ kg.

(c) Luftmotståndet F_{L} antas bero på farten, v, luftens densitet, ρ, och hopparens area, A (vinkelrätt mot rörelseriktningen). Vi gör ansatsen

$$F_{\mathrm{L}} = k v^a \rho^b A^c,$$

där k är en dimensionslös konstant. Sätter vi upp uttryck för enheter i VL och HL får vi (kom ihåg att $[\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}]$)

$$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = (\mathrm{m\,s^{-1}})^a \cdot (\mathrm{kg\,m^{-3}})^b \cdot (\mathrm{m^2})^c,$$

vilket ger $a = 2$, $b = 1$ och $c = 1$ (det senare eftersom $a - 3b + 2c = 1$). Om vi antar att den dimensionslösa konstanten är 1, så fås alltså

$$F_{\mathrm{L}} = \rho A v^2.$$

Sluthastigheten nås då luftmotståndskraften är lika stor som tyngdkraften, vilket ger ett uttryck för sluthastigheten enligt

$$mg = \rho A v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{mg}{\rho A}}.$$

Antag att hopparens massa är 100 kg och att arean 1 m^2. Sluthastigheten för Kittinger kan då uppskattas till

$$v = \sqrt{\frac{100 \cdot 9{,}8}{0{,}013 \cdot 1{,}3 \cdot 1}} \text{ m/s} = 0{,}2 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

För Baumgartner blir motsvarande hastighet $\sqrt{\frac{100 \cdot 9{,}8}{0{,}004 \cdot 1{,}3 \cdot 1}}$ m/s $= 0{,}4 \cdot 10^3$ m/s. Det verkar alltså som om luftmotståndet hade inverkan redan i början av Kittingers fall, men kanske inte så mycket i början av Baumgartners fall.

I beräkningarna har vi antagit att luftens densitet är densamma när sluthastigheten uppnås som vid uthoppet, vilket ju egentligen inte är fallet.

Svar: (a) Ungefär en halvminut vid båda höjderna. Ungefär 5 km. Har antagit konstant acceleration och konstant ljudhastighet. (b) 1,2 ton (Kittinger) respektive 3,8 ton (Baumgartner) (c) 0,2 km/s respektive 0,4 km/s.

3. (a) Vid inbromsningen uträttar friktionskraften ett arbete som är lika stort som minskningen av rörelseenergin, det vill säga

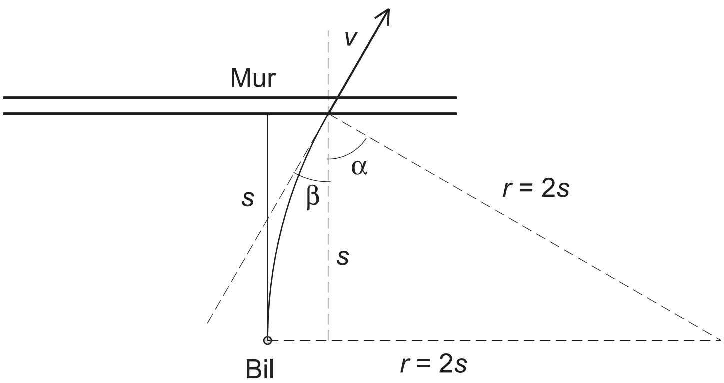
$$F_\mathrm{f}\, s = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{f} = \frac{mv^2}{2s}, \tag{2}$$

där s är bromssträckan. Newtons andra lag på bilen i svängen ger

$$F_\mathrm{f} = m\frac{v^2}{r},$$

där r är banradien. Insättning av friktionskraften (2) i detta ger

$$\frac{mv^2}{2s} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 2s.$$

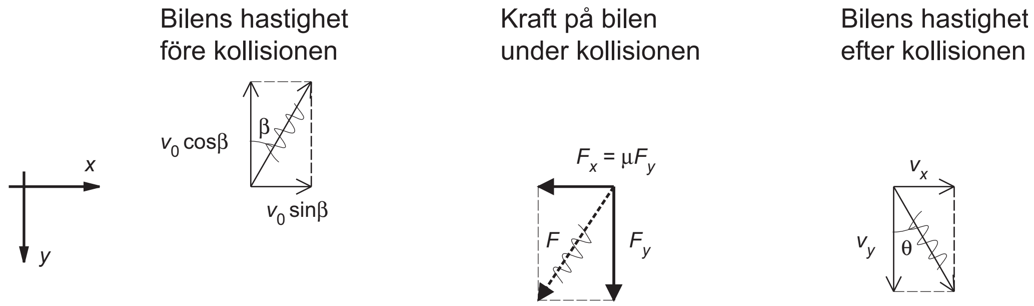


Figuren ger sedan

$$\cos\alpha = \frac{s}{2s} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

och sökta vinkeln $\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$.

(b) I figuren nedan visas komposantuppdelningar av bilens hastighet före kollisionen, kraften på bilen under kollisionen och bilens hastighet efter kollisionen.



Kraftfiguren ger

$$F_y^2 + (\mu F_y)^2 = F^2 \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{F}{\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{0{,}25 \cdot 10^6 \text{ N}}{\sqrt{1+0{,}40^2}} = 0{,}232 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Hastigheten i x-led efter kollisionen kan nu fås ur impulslagen,

$$mv_x - mv_0 \sin\beta = -\mu F_y \tau \quad \Rightarrow \quad v_x = v_0 \sin\beta - \frac{\mu F_y \tau}{m}.$$

Insättning av värden ger

$$v_x = \left(20 \sin 30^\circ - \frac{0{,}40 \cdot 0{,}232 \cdot 10^6 \cdot 0{,}10}{1\,200}\right) \text{ m/s} = 2{,}26 \text{ m/s}.$$

Låt Δx vara sträckan som bilen rör sig i x-led under kollisionen (och därmed också repans längd). Accelerationen i x-led är konstant vilket ger (använd $s = \frac{v_0+v}{2} t$)

$$\Delta x = \frac{v_0 \sin\beta + v_x}{2} \tau = \frac{20 \cdot \sin 30^\circ + 2{,}26}{2} \cdot 0{,}10 \text{ m} = 0{,}61 \text{ m}.$$

(c) Vi behöver bestämma hastighetens y-komposant efter kollisionen. Impulslagen i y-led ger

$$mv_y - (-mv_0 \cos\beta) = F_y \tau \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{F_y \tau}{m} - v_0 \cos\beta.$$

Insättning av värden ger

$$v_y = \left(\frac{0{,}232 \cdot 10^6 \cdot 0{,}10}{1\,200} - 20 \cos 30^\circ\right) \text{ m/s} = 2{,}02 \text{ m/s}.$$

Hastighetens storlek är således

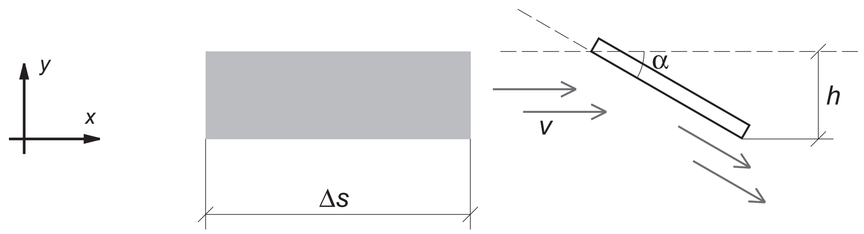
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2{,}26^2 + 2{,}02^2} \text{ m/s} = 3{,}0 \text{ m/s},$$

och vinkeln mellan hastigheten och en normal till muren ges av

$$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan \frac{2{,}26}{2{,}02} = 48^\circ.$$

Svar: (a) 30° (b) 0,61 m (c) 3,0 m/s, riktad 48° mot en normal till muren.

4. Figuren nedan visar den luftvolym som antas träffa en Δx lång bit av en rotor under tiden Δt.



Den luftvolym som ändrar hastighetsriktning har massan

$$m = \Delta s \Delta x h \rho,$$

där ρ är luftens densitet. Eftersom vi endast är intresserade av lyftkraften i y-led så använder vi impulslagen i y-led. Hastighetsändringen i y-led är

$$\Delta v_y = v \sin \alpha - 0 = v \sin \alpha.$$

Luftvolymens rörelsemängdsändring i y-led är

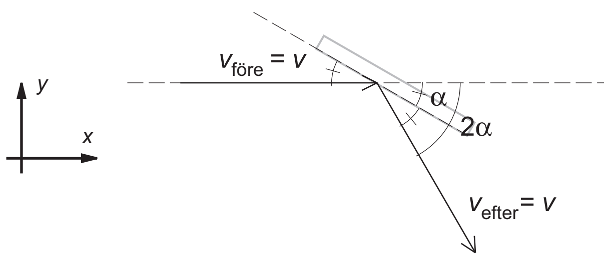
$$\Delta p_y = m \Delta v_y = \Delta s \Delta x h \rho \, v \sin \alpha.$$

Kraften i y-led på luften ges nu av impulslagen

$$F_y \Delta t = \Delta p_y \quad \Rightarrow \quad F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Delta x h \rho \, v \sin \alpha = v^2 \Delta x h \rho \, \sin \alpha. \tag{3}$$

På rotorn verkar en lika stor men motsatt riktad reaktionskraft som verkar som lyftkraft. Vi ser nu att vertikala lyftkraften blir som störst om vinkeln α är så nära under 90° som möjligt. Det verkar inte särskilt rimligt att nästan helt tvärställa bladen.

(b) I denna modell blir allt likadant utom att $\sin \alpha$ ovan ersätts av $\sin 2\alpha$ (se figuren nedan). Optimal vinkel blir istället 45°. Det verkar litet vettigare.



(c) Uttrycket (3) gav lyftkraften på en Δx lång bit av ett rotorblad. Lyftkraften per längdenhet är således

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \rho h v^2 \sin 2\alpha.$$

(d) Om vi antar att vinkeln $\alpha = 45^\circ$ kan lyftkraften per längdenhet skrivas

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \rho h v^2.$$

Farten genom luften vid radien x är $v = \omega x = 2\pi f x$. Med N stycken rotorblad med längden L blir (uppskattningen av) den totala lyftkraften

$$F = N \int_0^L \rho\, h\, (2\pi f x)^2\, \mathrm{d}x = 4\pi^2 N \rho h f^2 \int_0^L x^2\, \mathrm{d}x = \frac{4\pi^2 N \rho h f^2 L^3}{3}.$$

Enhetskontroll: VL: $[\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}]$, HL: $[\mathrm{kg\,m^{-3} \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^3 = kg\,m\,s^{-2}}]$.

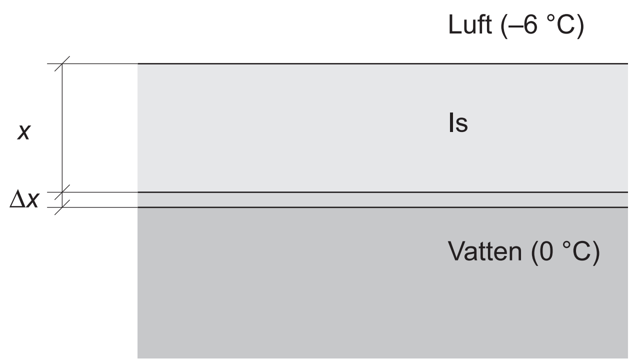
Insättning av värden ger

$$F = \frac{4\pi^2 \cdot 4 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^2 \cdot 6^3}{3}\ \mathrm{N} = 1 \cdot 10^5\ \mathrm{N},$$

vilket svarar mot en massa på tiotalet ton. Uppskattningen verkar hyfsat rimlig.

Svar: (a) 90°, knappast rimligt. (b) 45° (c) $\rho\, h\, v^2 \sin 2\alpha$. (d) $\frac{4\pi^2 N \rho h f^2 L^3}{3}$, storleksordningen 10 ton.

5. Låt istäckets tjocklek vara x. Betrakta ett tunt lager vatten som stelnar till is i gränsskiktet mellan istäcket och sjövattnet på tiden Δt. Låt detta lager ha tjockleken Δx och arean A.



Under tiden Δt avger den stelnande isen energimängden

$$W_1 = c_\mathrm{s}\, m = c_\mathrm{s}\, \rho\, A\, \Delta x,$$

där c_s är specifika smältentalpin för is och ρ är densiteten för is.

Energin som transporteras bort genom isen ges av

$$W_2 = P\, \Delta t = \lambda\, A\, \frac{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}}{x}\, \Delta t.$$

Om vi nu antar att $W_1 = W_2$ fås

$$c_\mathrm{s}\, \rho\, A\, \Delta x = \lambda\, A\, \frac{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}}{x}\, \Delta t,$$

vilket kan skrivas om till

$$\Delta t = \frac{c_\mathrm{s}\, \rho}{\lambda\, (T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L})}\, x\, \Delta x. \qquad (4)$$

(a) Sökta kvoten fås med hjälp av sambandet (4) enligt

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\dfrac{c_\mathrm{s}\,\rho}{\lambda\,(T_\mathrm{H}-T_\mathrm{L})}\,x_1\,\Delta x}{\dfrac{c_\mathrm{s}\,\rho}{\lambda\,(T_\mathrm{H}-T_\mathrm{L})}\,x_2\,\Delta x} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

(b) Integreras sambandet (4) fås

$$t(x)-t(0) = \int_0^x \frac{c_\mathrm{s}\,\rho}{\lambda\,(T_\mathrm{H}-T_\mathrm{L})}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{c_\mathrm{s}\,\rho}{\lambda\,(T_\mathrm{H}-T_\mathrm{L})}\,\frac{x^2}{2}.$$

Men $t(0)=0$ (ingen is alls när vi startar) så vi får att tiden t det tar för ett istäcke med tjockleken x att bildas ges av

$$t(x) = \frac{c_\mathrm{s}\,\rho}{2\lambda\,(T_\mathrm{H}-T_\mathrm{L})}\,x^2. \tag{5}$$

Enhetskontroll: VL: [s], HL: [$\mathrm{J\,kg^{-1}\cdot kg\,m^{-3}\cdot (W\,m^{-1}\,K^{-1})^{-1}\cdot K^{-1}\cdot m^2 = W\,s\,m^{-3}\,W^{-1}\,m\; K\,K^{-1}\,m^2 = s}$].

Informationen i uppgiften ger att specifika smältentalpin för is är

$$c_\mathrm{s} = \frac{0{,}10\cdot 10^6}{0{,}30}\ \mathrm{J/kg} = 3{,}3\cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}.$$

Vidare kan värmekonduktiviteten med hjälp av informationen i uppgiften bestämmas ur

$$\frac{1{,}1\cdot 10^3\ \mathrm{J}}{5{,}0\ \mathrm{s}} = \lambda\cdot 1{,}0\ \mathrm{m}^2\cdot\frac{10\ \mathrm{K}}{0{,}10\ \mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2{,}2\ \mathrm{W/(m\cdot K)}.$$

Insättning av värden i (5) ger nu sökta tiden

$$t(0{,}20\ \mathrm{m}) = \frac{3{,}3\cdot 10^5\cdot 0{,}92\cdot 10^3}{2\cdot 2{,}2\cdot 6{,}0}\cdot 0{,}20^2\ \mathrm{s} = 4{,}6\cdot 10^5\ \mathrm{s} = 130\ \mathrm{h} = 5{,}3\ \mathrm{dygn}.$$

Svar: (a) 0,3 (b) 5,3 dygn.