# WALLENBERGS FYSIKPRIS

KVALIFICERINGSTÄVLING
24 januari 2013

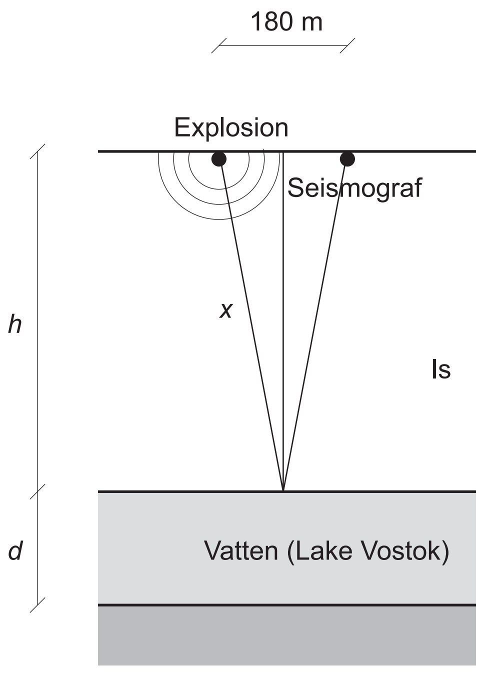
**SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET**

LÖSNINGSFÖRSLAG

**1.** (a) Ljudhastigheten i is är

$$\frac{180\ \text{m}}{55 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 3{,}27 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}.$$

Ur diagrammet avläser vi att det tar 1,95 s för tryckvågorna att utbreda sig från explosionen ned till is/vatten-gränsskiktet och tillbaka upp till seismografen.




Figuren är ej skalenlig!

Sträckan $x$ i figuren fås således ur

$$2x = 3{,}27 \cdot 10^{3}\ \text{m/s} \cdot 1{,}95\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad x = 3\,191\ \text{m}.$$

Pythagoras sats ger sedan istäckets tjocklek

$$h = \sqrt{3\,191^2 - 90^2}\ \text{m} = 3\,189\ \text{m}.$$

(b) Eftersom $h \approx x$ i (a)-uppgiften kan vi försumma tryckvågornas horisontella utbredning. Ur diagrammat avläser vi att det tar $(2{,}65 - 1{,}95)$ s $= 0{,}70$ s för tryckvågorna att utbreda sig från is/vatten-gränsskiktet ned till sjöbotten och tillbaka till is/vatten-gränsskiktet. Sjöns djup fås således ur

$$2d = 1\,500 \text{ m/s} \cdot 0{,}70 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad d = 0{,}53 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

**Svar:** (a) 3,2 km (b) 0,5 km.

**2.** (a) Den luftmängd som blåses ut från hårtorken under en sekund har massan

$$0{,}045 \text{ m}^3 \cdot 1{,}11 \text{ kg/m}^3 = 0{,}050 \text{ kg}.$$

(Densiteten vid temperaturen 47 ° avläses ur diagrammet.) Alltså måste varje sekund 0,050 kg luft värmas $(47 - 22)$ K $= 25$ K. Erforderlig energimängd för uppvärmningen är

$$W = cm\Delta T = 1{,}01 \cdot 10^3 \cdot 0{,}050 \cdot 25 \text{ J} = 1{,}26 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Värmeelementet måste alltså avge effekten

$$P = \frac{1{,}26 \cdot 10^3 \text{ J}}{1{,}0 \text{ s}} = 1{,}26 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

Sökta resistansen fås ur

$$P = UI = \frac{U^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U^2}{P} = \frac{230^2}{1{,}26 \cdot 10^3} \ \Omega = 42 \ \Omega.$$

(b) Massflödet in måste vara lika stort som massflödet ut, det vill säga 0,050 kg/s. Om $\Delta V$ är volymen av luften som tas in under tiden $\Delta t$ så är

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta m}{\rho}}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t}}{\rho},$$

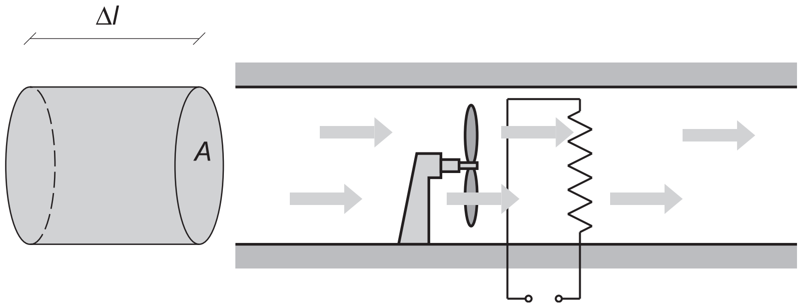
och volymflödet in är alltså

$$\frac{0{,}050 \text{ kg/s}}{1{,}2 \text{ kg/m}^3} = 0{,}042 \text{ m}^3/\text{s}.$$

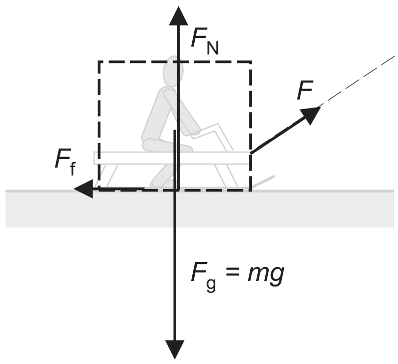
(Densiteten vid temperaturen 22 ° avläses ur diagrammet.) Om vi antar att luften som tas in under tiden $\Delta t$ har volymen $\Delta V = A \cdot \Delta l$ (se figur på nästa sida) så ges luftens fart av

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta l}{\Delta t} = A \cdot v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t}}{A} = \frac{0{,}042 \text{ m}^3/\text{s}}{60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 6{,}9 \text{ m/s}.$$

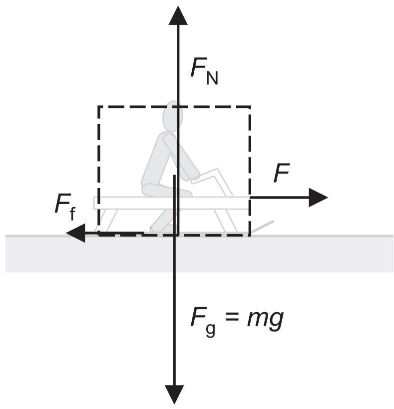
**Svar:** (a) 42 Ω (b) 6,9 m/s.




**3.** (a)



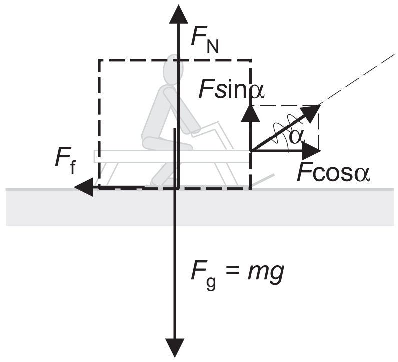

(b) Figuren nedan visar krafterna som verkar när Marie drar med en horisontell kraft.




Jämvikt (eftersom farten är konstant) innebär att $F_\mathrm{f} = F = 0{,}10 \cdot 10^3$ N och $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{g} = 0{,}30 \cdot 10^3$ N. Friktionstalet är således

$$\mu = \frac{F_\mathrm{f}}{F_\mathrm{N}} = \frac{0{,}10 \cdot 10^3\ \mathrm{N}}{0{,}30 \cdot 10^3\ \mathrm{N}} = 0{,}33.$$

Betrakta nu fallet när dragkraften ej är horisontell. Komposantuppdela dragkraften enligt figuren nedan.




Kraftjämvikt i horisontal- respektive vertikalled ger (kälken antas vara liten så att vridmomenteffekter kan försummas)

$$F_N + F\sin\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad F_N = mg - F\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F\cos\alpha = F_f. \tag{2}$$

Eftersom $F_f = \mu F_N$ fås med hjälp av ekvation (1)

$$F_f = \mu(mg - F\sin\alpha),$$

vilket tillsammans med ekvation (2) ger

$$F\cos\alpha = \mu mg - \mu F\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \tag{3}$$

Kvoten är som minst när uttrycket i nämnaren är som störst. Vi söker därför maximum för $f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$. Derivering ger $f'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha$. $f'(\alpha) = 0$ ger sedan

$$-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \mu.$$

Vinkeln som minimerar dragkraften är alltså

$$\alpha = \arctan\mu = \arctan 0{,}33 = 18{,}4^\circ.$$

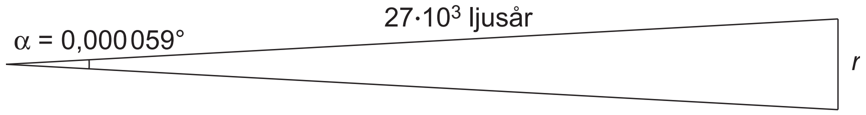
Vinkeln beror alltså enbart av friktionstalet $\mu$. Insättning i ekvation (3) ger minsta kraften

$$F = \frac{0{,}33\cdot 0{,}30\cdot 10^3}{\cos 18{,}4^\circ + 0{,}33\cdot\sin 18{,}4^\circ}\ \text{N} = 95\ \text{N}.$$

Minimum för dragkraften (3) kan också bestämmas genom att rita grafen till (3) på räknare och läsa av vinkeln när $F$ är som minst.

**Svar:** (a) Se figur ovan. (b) 18° mot horisontalplanet. (c) Se ovan.

**4.** Vi antar att S0-20 rör sig i en cirkulär bana. Radien i figuren är 21 mm, vilket motsvarar en vinkel $(5{,}9\cdot 10^{-5})^\circ$ (enligt skalstrecket så motsvarar 35,5 mm i figuren vinkeln 0,000 100°).




Den verkliga radien är

$$r \approx 27 \cdot 10^3 \text{ ljusår} \cdot \sin 0{,}000\,059^\circ = 0{,}028 \text{ ljusår}$$
$$= 0{,}028 \cdot 9{,}46055 \cdot 10^{15} \text{ m} = 2{,}63 \cdot 10^{14} \text{ m}.$$

Omloppstiden uppskattas ur figuren till

$$T = 34 \text{ år} = 34 \cdot 3{,}156 \cdot 10^7 \text{ s} = 1{,}07 \cdot 10^9 \text{ s}.$$

Den kraft som verkar på stjärnan är gravitationskraften $F = G\frac{Mm}{r^2}$, där $M$ är svarta hålets massa och $m$ är stjärnans massa. Newtons andra lag på stjärnan ger

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma = m\frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

vilket ger svarta hålets massa

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (2{,}63 \cdot 10^{14})^3}{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}07 \cdot 10^9)^2} \text{ kg} = 9{,}35 \cdot 10^{36} \text{ kg}.$$

Detta motsvarar

$$\frac{9{,}35 \cdot 10^{36}}{1{,}99 \cdot 10^{30}} = 4{,}7 \cdot 10^6$$

solmassor.

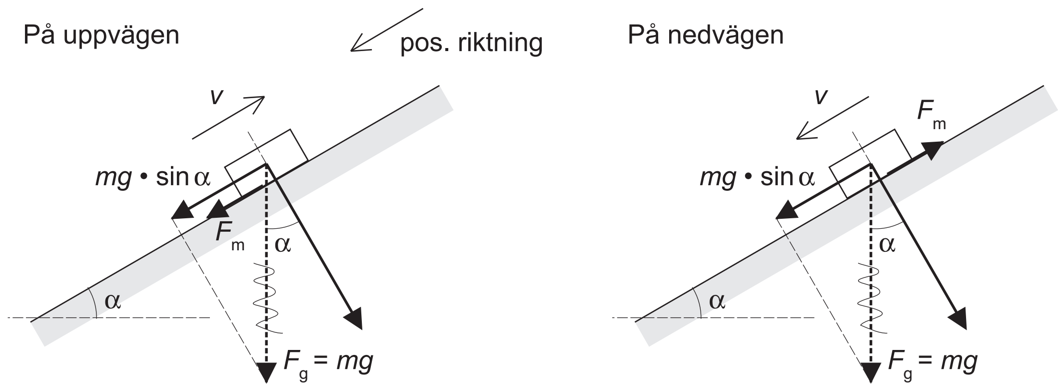
Felkällor: Banan är troligtivis inte cirkulär utan snarare elliptisk och ligger i ett plan som inte är vinkelrätt mot oss. Avståndet till Vintergatans centrum är osäkert. Dessa två faktorer gör bestämningen av banradien osäker. Omloppstiden är uppskattad från figuren och också osäker.

**Svar:** 4,7 miljoner solmassor.

**5.** Newtons andra lag på upp- respektive nedvägen ger

$$mg\sin\alpha + F_\text{m} = ma_\text{upp}, \tag{4}$$

$$mg\sin\alpha - F_\text{m} = ma_\text{ned}. \tag{5}$$




Avläsning i diagrammet ger

$$a_{\text{upp}} = \frac{0-(-0{,}80)}{12{,}10-11{,}20}\ \text{m/s}^2 = 0{,}89\ \text{m/s}^2,$$

$$a_{\text{ned}} = \frac{0{,}80-0}{13{,}12-12{,}10}\ \text{m/s}^2 = 0{,}78\ \text{m/s}^2.$$

Ledvis subtraktion av ekvation (5) från ekvation (4) ger

$$F_{\text{m}} - (-F_{\text{m}}) = ma_{\text{upp}} - ma_{\text{ned}},$$

vilket ger

$$F_{\text{m}} = \frac{m(a_{\text{upp}} - a_{\text{ned}})}{2} = \frac{0{,}50\cdot(0{,}89-0{,}78)}{2}\ \text{N} = 0{,}028\ \text{N}.$$

Ledvis addition av ekvationerna (5) och (4) ger

$$2mg\sin\alpha = m(a_{\text{upp}} + a_{\text{ned}}),$$

vilket ger

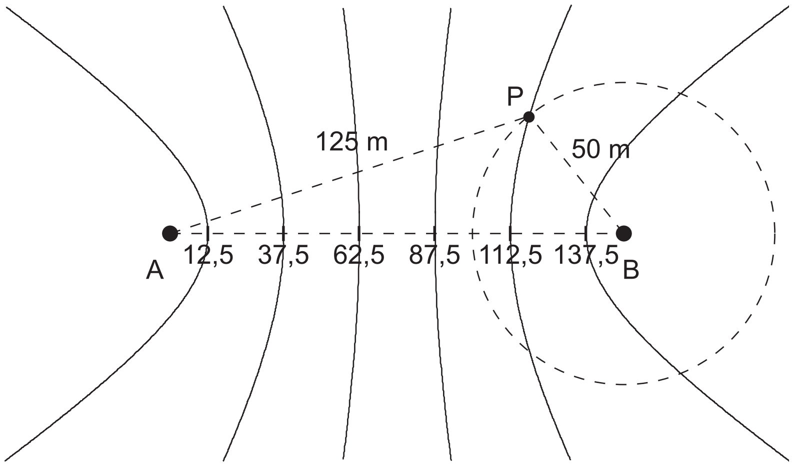
$$g = \frac{a_{\text{upp}} - a_{\text{ned}}}{2\sin\alpha} = \frac{0{,}89-0{,}78}{2\sin 5{,}2^\circ}\ \text{m/s}^2 = 9{,}2\ \text{m/s}^2.$$

**Svar:** Motståndskraften är 28 mN, tyngdaccelerationen 9,2 m/s$^2$.

**6.** Ljudvågornas våglängd är

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{6{,}8\ \text{Hz}} = 50\ \text{m}.$$

Mellan högtalarna bör ljudvågorna interferera så att vi får nodlinjer enligt figuren nedan.




Man skulle då kunna försöka närma sig en av högtalarna genom att röra sig längs med den andra nodlinjen tills man kommer 50 m ifrån högtalaren, till punkten P i figuren ovan. Vi behöver kontrollera att intensiteten i P inte överstiger 10 W/m$^2$.

Intensiteten 2,0 m från en högtalare ges av

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}} = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \cdot 10^{\frac{160}{10}} = 10^4\ \mathrm{W/m^2}.$$

Effekten från en högtalare ges av

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad P = 4\pi r^2 \cdot I = 4\pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 10^4\ \mathrm{W} = 503 \cdot 10^3\ \mathrm{W}. \tag{6}$$

(Världens slugaste skurk har alltså kommit över två rejäla högtalare...). Med hjälp av formeln i uppgiften och ekvation (6) kan nu amplituden i en ljudvåg på ett givet avstånd från en högtalare beräknas enligt

$$A = \sqrt{2\rho v I} = \sqrt{2\rho v \frac{P}{4\pi r^2}} = \sqrt{\frac{\rho v P}{2\pi}} \cdot \frac{1}{r}.$$

I punkten P är amplituden för ljudvågen från högtalare B således

$$A_{50} = \sqrt{\frac{\rho v P}{2\pi}} \cdot \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1{,}29 \cdot 340 \cdot 503 \cdot 10^3}{2\pi}} \cdot \frac{1}{50}\ \mathrm{Pa} = 118{,}5\ \mathrm{Pa}.$$

Eftersom punkten P ligger på andra nodlinjen är det $1{,}5\lambda = 1{,}5 \cdot 50\ \mathrm{m} = 75$ m längre till högtalare A från P än till högtalare B. Avståndet till A är alltså 125 m, och amplituden i P för ljudvågen från högtalare A

$$A_{125} = \sqrt{\frac{\rho v P}{2\pi}} \cdot \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1{,}29 \cdot 340 \cdot 503 \cdot 10^3}{2\pi}} \cdot \frac{1}{125}\ \mathrm{Pa} = 47{,}4\ \mathrm{Pa}.$$

Den totala amplituden i P när båda högtalarna är igång är

$$(118{,}5 - 47{,}4)\ \mathrm{Pa} = 71{,}1\ \mathrm{Pa}$$

på grund av den destruktiva interferensen i punkten, och intensiteten är

$$I = \frac{A}{2\rho v} = \frac{71{,}1^2}{2 \cdot 1{,}29 \cdot 340}\ \mathrm{W/m^2} = 5{,}8\ \mathrm{W/m^2}.$$

Det går alltså! (**Svar**)