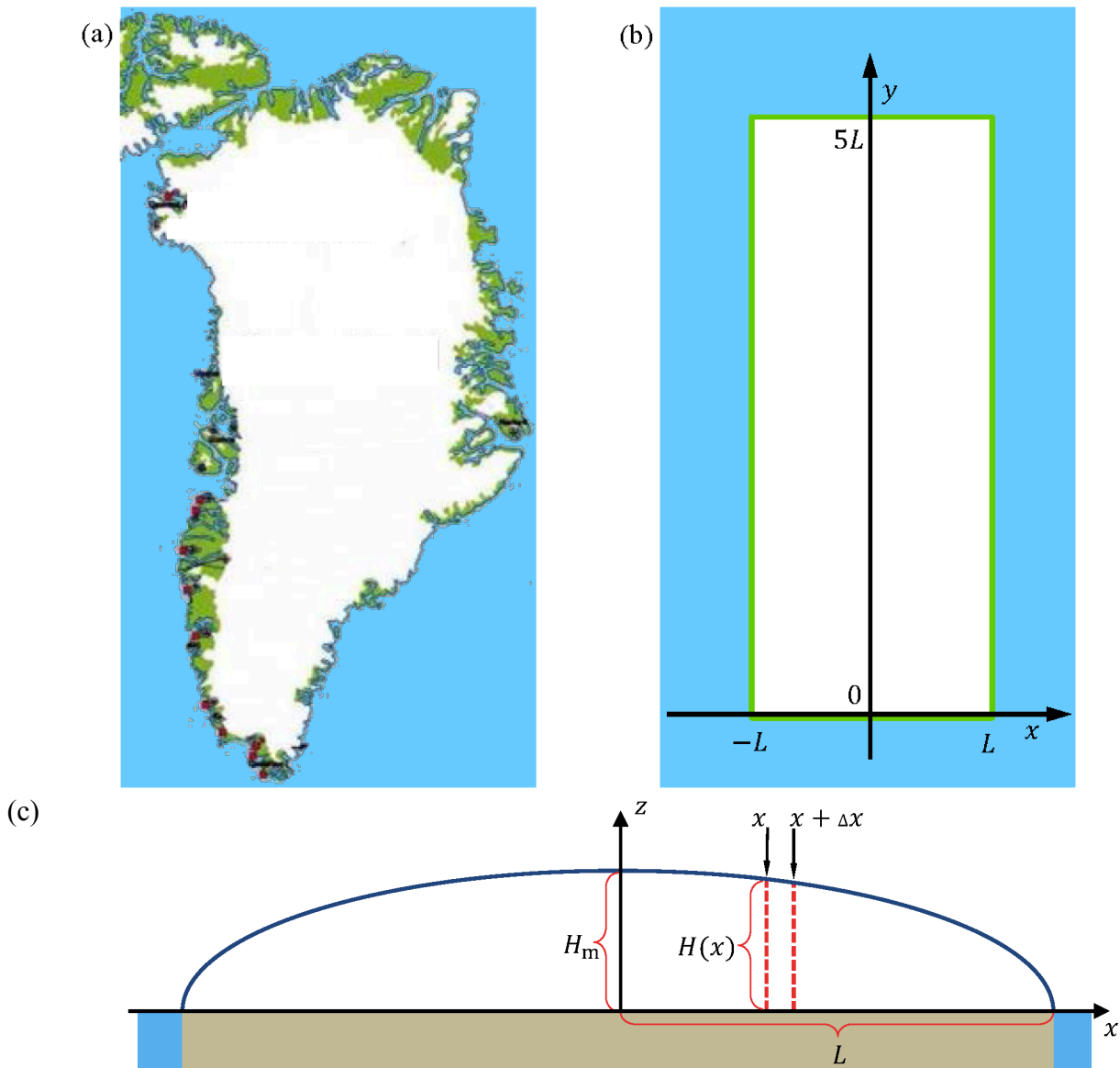


Inledning

Detta problem handlar om fysiken hos Grönlands istäcke, världens näst största glaciär, fig. 3.1(a). Lätt idealiserat kan vi modellera Grönland som en rektangulär ö med (öst-västlig) bredd $2L$ och (nord-sydlig) längd $5L$, med marken vid havsnivån och helt täckt av inkompressibel is (av konstant densitet ρ_{ice}), se fig. 3.1(b). Istäckets höjdprofil $H(x)$ beror inte på y -koordinaten och ökar från noll vid kusterna $x = \pm L$ till en maximal höjd H_m längs den centrala nord-sydliga axeln (y -axeln), känd som isdelaren, se fig. 3.1(c).



Figur 3.1 (a) Karta över Grönland som visar istäckets omfattning (vitt), de isfria kustregionerna (grönt) och det omgivande havet (blått). (b) Den grova modellen där Grönlands istäcke antas täcka ett rektangulärt område i xy -planet med sidlängderna $2L$ och $5L$. Isdelaren, linjen med maximal ishöjd H_m , antas löpa längs y -axeln. (c) Ett vertikalt snitt (xz -planet) genom istäcket, som visar höjdprofilen $H(x)$ (blå kurva). $H(x)$ är oberoende av y -koordinaten för $0 < y < 5L$, men faller tvärt till noll vid $y = 0$ och $y = 5L$. z -axeln markerar isdelarens position. Av tydlighetsskäl har den vertikala skalan överdrivits jämfört med de horisontella. Isens densitet ρ_{ice} antas konstant.

Två användbara formler

I detta problem kan du ha nytta av integralen:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$$

och approximationen $(1+x)^a \approx 1+ax$, giltig för $|ax| \ll 1$.

Höjdprofilen hos ett istäcke

Betrakta glaciären som ett inkompressibelt hydrostatiskt system med fix höjdprofil $H(x)$.

3.1	Skriv ned ett uttryck för trycket $p(x, z)$ inuti istäcket, som funktion av den vertikala höjden z över marken och avståndet x från isdelaren. Försumma lufttrycket.	0,3
-----	--	-----

Betrakta ett givet vertikalt utsnitt från istäcket i jämvikt, som täcker en liten horisontell basyta $\Delta x \Delta y$ mellan x och $x + \Delta x$, se de röda streckade linjerna i fig. 3.1(c). Storleken på Δy är oväsentlig. Nettodelen av den horisontella kraften ΔF på utsnittets två vertikala sidor, som beror på höjdskillnaden mellan utsnittets inre resp. yttre sida, balanseras av en friktionskraft $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ från marken på basytan $\Delta x \Delta y$, där S_b är den s.k. basala skjuvspänningen $S_b = 100 \text{ kPa}$.

3.2a	För givet värde på x , visa att kvoten $S_b = \Delta F / (\Delta x \Delta y)$, i gränsen $\Delta x \rightarrow 0$ blir $S_b \propto H \, dH/dx$.	0,9
3.2b	Bestäm ett uttryck för höjdprofilen $H(x)$ som funktion av ρ_{ice} , g , L , S_b och avståndet x från isdelaren. Resultatet visar att den maximala glaciärhöjden H_m skalar med halvbredden L som $H_m \propto L^{1/2}$.	0,8
3.2c	Bestäm den exponent γ som anger hur istäckets totala volym V_{ice} skalar med arean A hos den rektangulära ön, $V_{\text{ice}} \propto A^\gamma$.	0,5

Ett dynamiskt istäcke

I praktiken betar sig isen, som på grund av gravitationen rör sig från de centrala delarna ut mot kusten, som en viskös inkompressibel vätska. I modellen antas isen behålla sin höjdprofil $H(x)$, genom att den snö som faller i de centrala delarna motsvaras av avsmältningen vid kusten. Utöver istäckets geometri i fig. 3.1(b) och (c) behövs följande antaganden:

- 1) Isen rör sig parallellt med x -axeln bort från isdelaren (y -axeln).
- 2) Ackumuleringshastigheten c (m/år) i de centrala delarna är konstant.
- 3) Isen kan bara lämna glaciären genom smältning vid öst- och västkusterna, $x = \pm L$.
- 4) Den horisontella (x -)komponenten $v_x(x) = dx/dt$ hos isrörelsen är oberoende av z .
- 5) Den vertikala (z -)komponenten $v_z(z) = dz/dt$ hos isrörelsen är oberoende av x .

Betrakta enbart de centrala delarna $|x| \ll L$, nära mitten hos istäcket, där höjdvariationerna kan försummas, dvs. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Utnyttja massans bevarande för att finna den horisontella hastigheten $v_x(x)$ hos isrörelsen uttryckt i storheterna c , x , and H_m .	0,6
-----	--	-----

Antas inkompressibilitet, dvs. konstant densitet ρ_{ice} , leder villkoret om massans bevarande till följande begränsning av isrörelsens hastighetskomponenter

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Redovisa ett uttryck för z-beroendet hos den vertikala komponenten $v_z(z)$ hos isrörelsen.	0,6
-----	---	-----

En ispartikel med startposition (x_i, H_m) kommer efter hand, röra sig som en del av istäcket längs en bana $z(x)$ i det vertikala xz -planet.

3.5	Härled ett uttryck för en sådan bana $z(x)$.	0,9
-----	---	-----

Ålder- och klimatindikatorer för det dynamiska istäcket

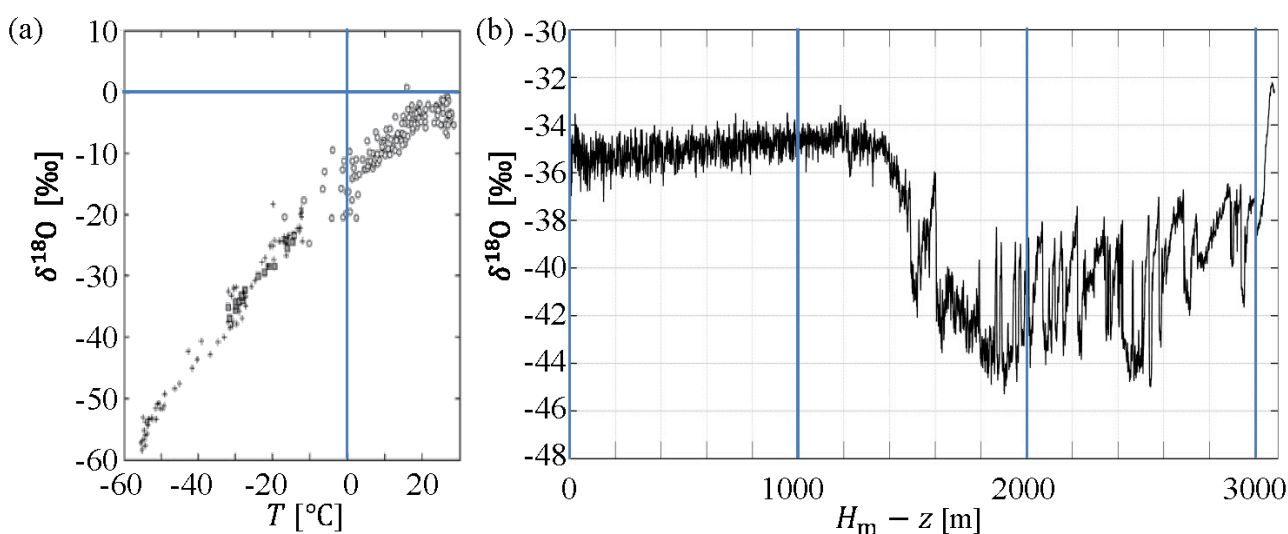
Med hjälp av hastighetskomponenterna $v_x(x)$ and $v_z(z)$, kan åldern $\tau(z)$ hos istäcket på ett givet djup $H_m - z$ under istäckets yta uppskattas.

3.6	Redovisa ett uttryck för åldern $\tau(z)$ hos istäcket som en funktion av höjden z , över marken, ovanför isdelaren $x = 0$.	1,0
-----	---	-----

En isärna som borrar ur istäcket i det inre av Grönland kommer att innehålla snö som lagrats i årtusenden. Därigenom kan klimatförändringar från långt tillbaka studeras. En bra indikator är den s.k. $\delta^{18}\text{O}$, som definieras genom

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

där $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ betecknar den relativa förekomsten av de två stabila syreisotoperna ^{18}O and ^{16}O . Referensvärdet R_{ref} baseras på isotopsammansättningen i världshaven längs ekvatorn.



Figur 3.2 (a) Det observerade sambandet mellan $\delta^{18}\text{O}$ i snö som funktion av årsmedelvärdet av ytemperaturen T . (b) Mätvärden för $\delta^{18}\text{O}$ som funktion av djupet $H_m - z$ under ytan, från en borrhäla som når ner till marknivån på en plats längs isdelaren, där $H_m = 3060$ m.

Mätvärdena för det grönländska istäcket visar att $\delta^{18}\text{O}$ i snön varierar nära nog linjärt med temperaturen, fig 3.2(a). Om detta samband alltid gällt skulle ett värde på $\delta^{18}\text{O}$ från borrhälskärnan på djupet $H_m - z$ ge en uppskattning av temperaturen T nära Grönland vid åldern $\tau(z)$.

Emellertid visar värdena på $\delta^{18}\text{O}$ i en 3060 m lång borrhälskärna ett tvärt avbrott på djupet 1492 m, fig. 3.2(b), vilket indikerar slutet på den senaste istiden. Den började för 120 000 år sedan, svarande mot djupet 3040 m, och den nuvarande varmare perioden började 11 700 år sedan, svarande mot djupet 1492 m. Anta att de två perioderna kan beskrivas med olika ackumuleringshastigheter, c_{ia} (istid) respektive c_{ig} (varmare period). Man kan anta att H_m har varit konstant under dessa 120 000 år.

3.7a	Bestäm ackumuleringshastigheterna c_{ia} och c_{ig} .	0,8
3.7b	Använd data från fig. 3.2 för att beräkna temperaturändringen vid övergången från senaste istid till nuvarande varmare period.	0,2

Höjning av havsvattennivån på grund av att Grönlandsisen smälter

En fullständig smältning av Grönlandsisen skulle orsaka en global höjning av havsvattennivån. För att göra en grov uppskattning av denna höjning av havsvattennivån kan man anta att havsvattennivån höjs lika mycket överallt i samtliga hav, som tillsammans kan antas ha arean $A_0 = 3.61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Beräkna den genomsnittliga globala havsnivåhöjningen om Grönlandsisen smälte fullständigt, givet dess nuvarande area $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ och den basala skjuvspänningen $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0,6
-----	---	-----

Den massiva Grönlandsisen utövar en dragningskraft på det omgivande havet. Om istäcket smälter, kommer denna lokala högvatteneffekt att försvinna och havsvattennivån nära Grönland kommer att sjunka. Detta motverkar delvis havsnivåhöjningen som beräknades ovan.

För att uppskatta storleken av denna gravitationella inverkan på vattnet kan Grönlandsisen modelleras som en massiv punktmassa av is med centrum på marknivå och med den totala massan hos Grönlandsisen. Köpenhamn ligger på avståndet 3500 km längs med jordytan från punktmassan. Antag att Jorden, utan punktmassa, har sfärisk symmetri och att havsvattnet är fördelat över hela jordytan med arean $A_E = 5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Alla effekter av jordens rotation kan försummas.

3.9	Använd denna modell för att bestämma differensen $h_{CPH} - h_{OPP}$ mellan havsnivåerna i Köpenhamn (h_{CPH}), och på motsatta sidan jordklotet från Grönland (h_{OPP}).	1,8
-----	---	-----