WALLENBERGS FYSIKPRIS

FINALTÄVLING
3 maj 2014

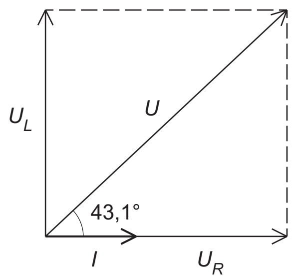
SVENSKA FYSIKERSAMFUNDET

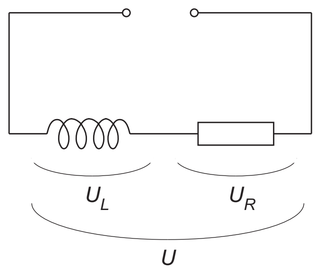
LÖSNINGSFÖRSLAG

1. (a) Fasförskjutningen φ fås ur

$$P = UI\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1\,350}{1\,850} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 43{,}1^\circ.$$

Ett visardiagram kan då ritas enligt figuren nedan.





(b) För att fasförkjutningen skall bli noll måste $U_C = U_L$, vilket innebär att reaktanserna måste vara lika, $X_C = X_L$. Induktiva reaktansen kan beräknas enligt $X_L = \frac{U_L}{I}$. Strömmens effektivvärde är $I = \frac{1\,850\ \text{VA}}{230\ \text{V}} = 8{,}04$ A. Detta ger

$$X_C = X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{U\sin\varphi}{I} = \frac{230 \cdot \sin 43{,}1^\circ}{8{,}04}\ \Omega = 19{,}6\ \Omega.$$

(c) Totala impedansen utan faskompensering är

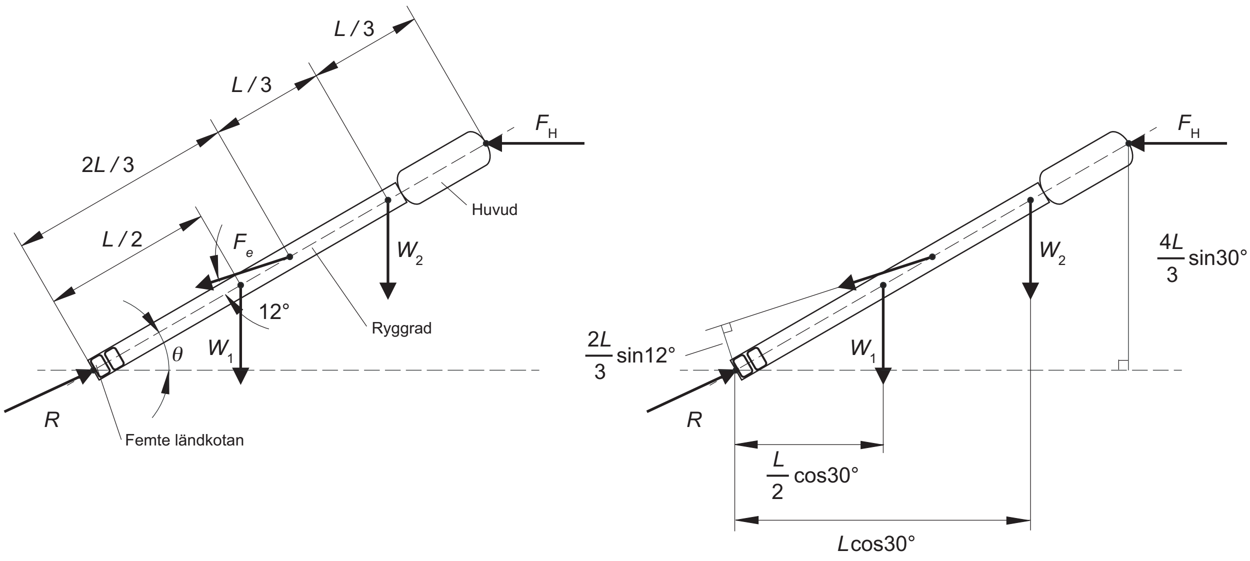
$$Z = \frac{U}{I} = \frac{230}{8{,}04}\ \Omega = 28{,}6\ \Omega.$$

Med faskompensering blir totala impedansen lika med motståndets resistans, det vill säga

$$Z = R = \frac{U_R}{I} = \frac{U\cos\varphi}{I} = \frac{230 \cdot \cos 43{,}1^\circ}{8{,}04}\ \Omega = 20{,}9\ \Omega.$$

Svar: (a) Se ovan (b) 19,6 Ω (c) 28,6 Ω respektive 20,9 Ω.

2. (a) Välj punkten P (R:s angreppspunkt) som momentpunkt.



Momentarmen för kraften F_e är då (se figuren) $\frac{2L}{3}\sin 12^\circ$. Momentjämvikt ger

$$F_e \cdot \frac{2L}{3}\sin 12^\circ + F_\mathrm{H} \cdot \frac{4L}{3}\sin 30^\circ = 0{,}4mg \cdot \frac{L}{2}\cos 30^\circ + (0{,}2mg + Mg) \cdot L\cos 30^\circ,$$

vilket ger

$$F_e = \frac{(0{,}4m + M)g\cos 30^\circ - \frac{4}{3}F_\mathrm{H}\sin 30^\circ}{\frac{2}{3}\sin 12^\circ}. \tag{1}$$

Insättning av värden ger

$$F_e = \frac{(0{,}4 \cdot 65 + 20) \cdot 9{,}82 \cdot \cos 30^\circ - \frac{4}{3} \cdot 0 \cdot \sin 30^\circ}{\frac{2}{3}\sin 12^\circ}\ \mathrm{N} = 2\,820\ \mathrm{N}.$$

Vinkeln mellan kraften F_e och horisontalplanet är $30^\circ - 12^\circ = 18^\circ$. Kraftjämvikt i vertikalled ger

$$R_y - 0{,}4mg - (0{,}2mg + Mg) - F_e \sin 18^\circ = 0,$$

vilket ger

$$R_y = (0{,}6m + M)g + F_e \sin 18^\circ = ((0{,}6 \cdot 65 + 20) \cdot 9{,}82 + 2\,820 \cdot \sin 18^\circ)\ \mathrm{N} = 1\,450\ \mathrm{N}.$$

Kraftjämvikt i horisontalled ger

$$R_x - F_e \cos 18^\circ - F_\mathrm{H} = 0,$$

vilket ger

$$R_x = F_e \cos 18^\circ + F_\mathrm{H} = (2\,820 \cdot \cos 18^\circ + 0)\ \mathrm{N} = 2\,680\ \mathrm{N}.$$

Sökta kraftens storlek är

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1\,450^2 + 2\,680^2}\ \text{N} = 3{,}1 \cdot 10^3\ \text{N}.$$

Vinkeln β som kraften bildar med horisontalplanet fås ur

$$\tan\beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1\,450}{2\,680} \quad \Rightarrow \quad \beta = 28^\circ.$$

(b) Insättning av $m = 65$ kg, $M = 20$ kg och $F_\text{H} = 200$ N i ekvation (1) ger $F_e = 1\,860$ N. Vi får då

$$R_y = (0{,}6m + M)g + F_e \sin 18^\circ = ((0{,}6 \cdot 65 + 20) \cdot 9{,}82 + 1\,860 \cdot \sin 18^\circ)\ \text{N} = 1\,150\ \text{N}.$$

och

$$R_x = F_e \cos 18^\circ + F_\text{H} = (1\,860 \cdot \cos 18^\circ + 200)\ \text{N} = 1970\ \text{N}.$$

Kraftens storlek är nu

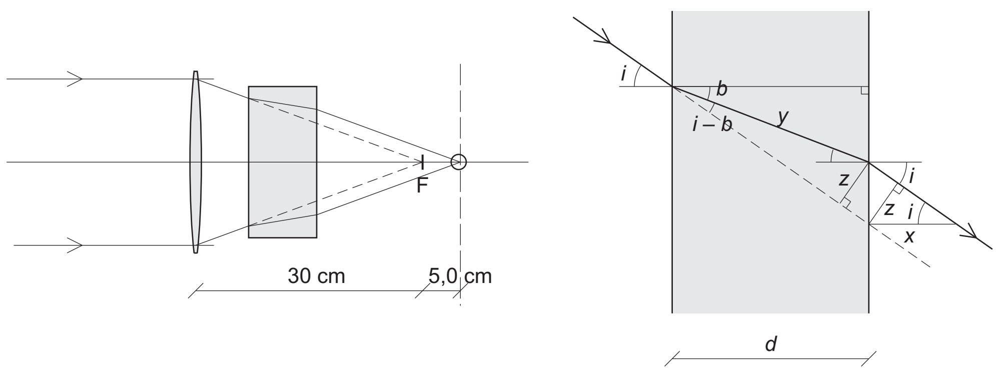
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1\,150^2 + 1\,970^2}\ \text{N} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{N},$$

och vinkeln med horisontalplanet fås ur

$$\tan\beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1\,150}{1\,970} \quad \Rightarrow \quad \beta = 30^\circ.$$

Svar: (a) 3,1 kN, 28° mot horisontalplanet (b) 2,3 kN, 30° mot horisontalplanet.

3. Fokus skall förskjutas 5,0 cm enligt figuren nedan. Vi vill alltså att avståndet x i den högra figuren nedan skall vara 5,0 cm.



Ur figuren får vi

$$\sin i = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{z}{\sin i}. \tag{2}$$

Ur figuren fås också att $\cos b = \frac{d}{y}$ och $\sin(i-b) = \frac{z}{y}$, vilket ger

$$z = y\sin(i-b) = \frac{d\sin(i-b)}{\cos b} = \frac{d(\sin i\cos b - \cos i\sin b)}{\cos b}.$$

Insättning i ekvation (2) ger

$$x = \frac{d\sin(i-b)}{\sin i\cos b} = \frac{d(\sin i\cos b - \cos i\sin b)}{\sin i\cos b} = d\left(1 - \frac{\cos i\sin b}{\sin i\cos b}\right)$$
$$= d\left(1 - \frac{\tan b}{\tan i}\right) \approx d\left(1 - \frac{\sin b}{\sin i}\right),$$

där vi använt att $\tan\alpha \approx \sin\alpha$ för små vinklar α. Brytningslagen ger $\sin i = n\sin b$, det vill säga $\frac{\sin b}{\sin i} = \frac{1}{n}$, så vi får

$$x = d\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

vilket ger

$$d = \frac{x}{1-\frac{1}{n}} = \frac{5{,}0 \text{ cm}}{1-\frac{1}{1{,}5}} = 15 \text{ cm}.$$

Svar: Plattan skall vara 15 cm tjock och placeras parallellt med linsen. Det spelar dock ingen roll var någonstans mellan linsen och skärmen som den placeras.

Alternativ lösning: Brytningslagen ger

$$\sin i = n\sin b. \tag{3}$$

Ur figuren fås ($\sin i \approx \tan i$ och $\sin b \approx \tan b$ eftersom vinklarna är små)

$$\sin i \approx \tan i = \frac{h}{d-x} \tag{4}$$

och

$$\sin b \approx \tan b = \frac{h}{d}. \tag{5}$$

Insättning av (4) och (5) i brytningslagen (3) ger

$$\frac{h}{d-x} = n\frac{h}{d},$$

vilket efter lite algebra ger

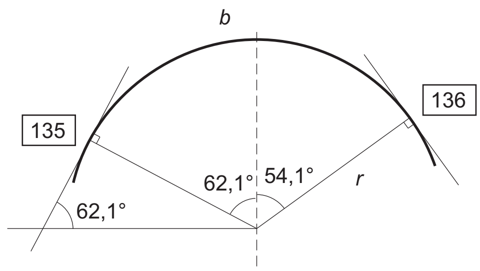
$$d = \frac{x}{1-\frac{1}{n}} = \frac{5{,}0 \text{ cm}}{1-\frac{1}{1{,}5}} = 15 \text{ cm}.$$

4. (a) Vi räknar som om det är en punktpartikel som rör sig längs banan. Hastigheterna vid de olika stolparna fås med hjälp av energiprincipen,

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$

där h är höjden ovanför höjden 42,38 m där accelerationszonen slutar. Vi har här bortsett från luft- och rullmotstånd. Insättning av $v_0 = 23{,}5$ m/s och värden på h från tabellen i uppgiften ger farter enligt tabellen nedan.

Stolpe	Fart (m/s)
129	
(Accelerations-zon slut)	23,5
130	23,1
131	22,5
132	21,3
133	19,6
134	17,1
135	12,1
Top Hat	6,8
136	11,7



(b) Om vi antar att banan mellan stolpe 135 och 136 har formen av en cirkelbåge med medelpunktsvinkeln α, och att bågens längd ges av "Avstånd till nästa stolpe" kan krökningsradien uppskattas ur

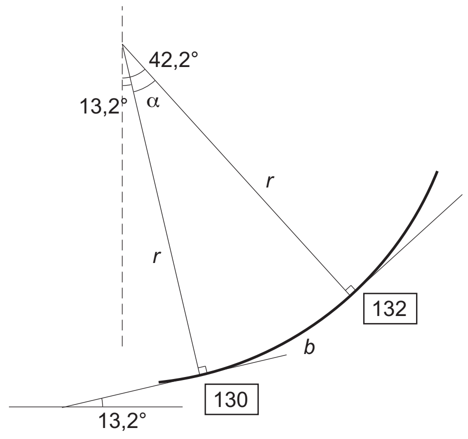
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{180^\circ}{\alpha} \cdot \frac{b}{\pi}.$$

Insättning av $\alpha = 62{,}1^\circ + 54{,}1^\circ = 116{,}2^\circ$ och $b = 13{,}139$ m ger

$$r = \frac{180}{116{,}2} \cdot \frac{13{,}139}{\pi} \text{ m} = 6{,}5 \text{ m}.$$

Centripetalacceleration kan uppskattas till

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{6{,}8^2}{6{,}5} \text{ m/s}^2 = 7{,}1 \text{ m/s}^2.$$



(c) Vi antar att banan mellan stolpe 130 och 132 har formen av en cirkelbåge med båglängden $b = (4{,}822 + 4{,}447)$ m $= 9{,}269$ m och medelpunktsvinkeln $\alpha = 42{,}2^\circ - 13{,}2^\circ = 29{,}0^\circ$ (se figur ovan).

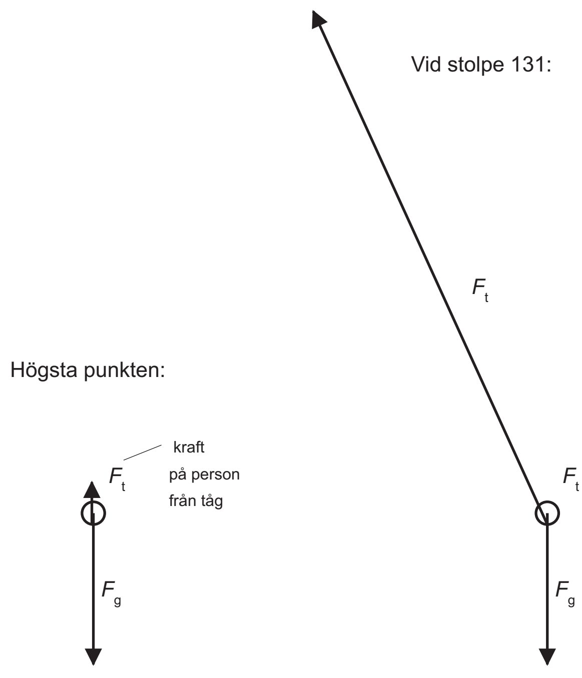
Krökningsradien kan då uppskattas till

$$r = \frac{180}{29{,}0} \cdot \frac{9{,}269}{\pi} \text{ m} = 18{,}3 \text{ m},$$

och centripetalaccelerationen till

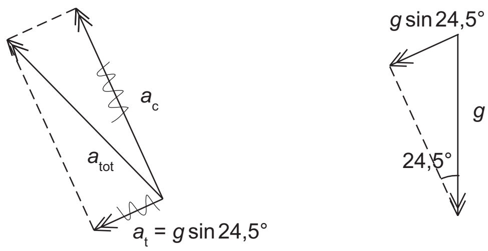
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{22{,}5^2}{18{,}3} \text{ m/s}^2 = 27{,}7 \text{ m/s}^2.$$

(d)



(e) I högsta punkten är tangentiella accelerationen noll, så totala accelerationen är lika med centripetalaccelerationen, det vill säga 7,1 m/s^2.

Vid stolpe 131 har accelerationen en radiell komposant som är 27,7 m/s^2 (centripetalaccelerationen beräknad i uppgift (c)), och en tangentiell komposant som fås som komposanten av tyngdaccelerationen i tangentens riktning, se figuren nedan (ej skalenlig).



Totala accelerationen har storleken

$$a_{\text{tot}} = \sqrt{a_c^2 + (g \sin\beta)^2} = \sqrt{27{,}7^2 + (9{,}82 \sin 24{,}5^\circ)^2} \text{ m/s}^2 = 28{,}0 \text{ m/s}^2.$$

(f) Högsta punkten: Tåget masscentrum kommer aldrig upp till högsta höjden på banan, så farten högst upp borde vara något högre än den som beräknades i uppgift (a). Att tåget åker under spåret borde innebä ra att krökningsradien blir lite mindre än beräknat i (b). Då borde centripetalaccelerationen (v^2/r) bli lite större.

Vid stolpe 131: För den som sitter längst fram borde farten när man passerar stolpe 131 vara något högre än den som beräknats i uppgift (a), eftersom tågets masscentrum befinner sig på en lägre höjd.

Omvänt borde farten bli något lägre för den som sitter längst bak, eftersom tågets masscentrum befinner sig högre upp när man själv passerar stople 131.

Svar: (a) Se tabell ovan (b) 6,5 m; 7,1 m/s^2 (c) 18,3 m; 27,7 m/s^2 (d) se figur ovan (e) 7,1 m/s^2; 28,0 m/s^2.

5. (a) Avståndet mellan en nod och en buk är $\lambda/4$, vilket ger sambandet

$$L = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4L = 4(H+h) = 4 \cdot 0{,}17 \text{ m} = 0{,}68 \text{ m}.$$

Frekvensen för grundtonen är då

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}68} \text{ Hz} = 500 \text{ Hz}.$$

Detta är en bit ifrån den uppmätta frekvensen 180 Hz.

(b) Om luften komprimeras adiabatiskt gäller att $pV^\gamma =$ konstant, vilket ger

$$p(V - \Delta V)^\gamma = p_0 V_0^\gamma.$$

Insättning av $\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} x$ ger

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - \Delta V} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - \frac{\pi d^2}{4} x} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{\pi d^2}{4V_0} x} \right)^\gamma$$

Här är $V_0 = \frac{\pi D^2 H}{4}$. Trycket kan alltså skrivas

$$p = p_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{d^2}{D^2} \frac{x}{H}} \right)^{\gamma} = p_0 \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \frac{x}{H} \right)^{-\gamma}.$$

(c) Eftersom $x \ll H$ kan vi göra approximationen

$$p = p_0 \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \frac{x}{H} \right)^{-\gamma} \approx p_0 \left(1 + \gamma \frac{d^2}{D^2} \frac{x}{H} \right)$$

Resultanten till tryckkrafterna på luftpaketet är (positiv riktning nedåt)

$$F = p_0 A - pA = p_0 A - p_0 \left(1 + \frac{\pi \gamma d^2}{4V_0} x \right) A = -\frac{\pi \gamma d^2 A p_0}{4V_0} x,$$

där A är det cylindriska luftpaketets bottenarea. Insättning av $V_0 = \frac{\pi D^2 H}{4}$ och $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ger

$$F = -\frac{\pi \gamma d^4 p_0}{4D^2 H} x.$$

Kraften kan alltså skrivas $F = -kx$, där

$$k = \frac{\pi \gamma d^4 p_0}{4D^2 H} = \frac{\pi \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}02^4 \cdot 1 \cdot 10^5}{4 \cdot 0{,}06^2 \cdot 0{,}15} \text{ N/m} = 33 \text{ N/m}.$$

(d) Eftersom $F = -kx$ kommer luftpaketet att svänga som en harmonisk oscillator med frekvensen $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Luftpaketets massa är

$$m = 1{,}2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}05}{4} \text{ kg} = 1{,}9 \cdot 10^{-5} \text{ kg}.$$

Frekvensen är således

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{33}{1{,}9 \cdot 10^{-5}}} \text{ Hz} = 210 \text{ Hz},$$

vilket med en värdesiffra stämmer överens med det mätta värdet (180 Hz).

(e) Expansioner och kompressioner sker så snabbt (under bråkdelen av en sekund) att temperaturen knappast hinner utjämnas mellan flaskan och gasen under förloppet gång. Därför är det inte rimligt att anta konstant temperatur.

Ljudvågornas våglängd

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{230} \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}$$

är betydligt större än H vilket innebär att all luft i flaskan har ungefär samma fas, det vill säga trycket är ungefär detsamma överallt. (Alternativt: Perioden är mycket längre än tiden H/v som det tar för en tryckvåg att röra sig från flaskans topp till botten. Trycket hinner inte utjämnas.)

Svar: (a) 500 Hz (b) se ovan (c) 41 N/m (d) 0,2 kHz (e) se ovan.