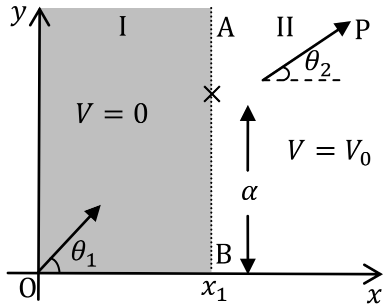
Extremprincipen

(Total poäng: 10)

A Extremprincipen i mekaniken

Ett horisontellt, friktionsfritt xy-plan är, som figur 1 visar, uppdelat i två områden I och II, med skiljelinjen AB där $x = x_1$. En punktformig partikel med massan m har potentiella energin $V = 0$ i område I och $V = V_0$ i område II. Partikeln rör sig från origo O med farten v_1 längs en linje som bildar vinkeln θ_1 med x-axeln. Den når punkten P i område II med farten v_2 längs en linje som bildar vinkeln θ_2 med x-axeln. Försumma gravitationen och relativistiska effekter i hela uppgift T2.



Figur 1

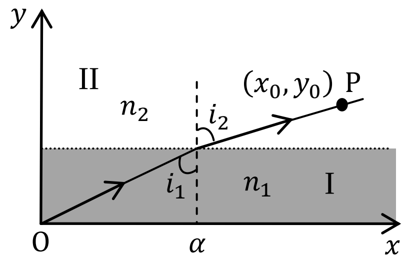
A1	Uttryck v_2 som funktion av m, v_1 and V_0.	**0.2**
A2	Uttryck v_2 som funktion av v_1, θ_1 och θ_2.	**0.3**

Vi definierar nu en storhet kallad verkan, $A = m \int v(s) ds$, där ds är en infinitesimal sträcka längs den bana en partikel med massan m rör sig med farten $v(s)$. Integralen tas längs banan. Exempelvis blir, för en partikel med farten v som rör sig ett varv längs en cirkel med radie R, verkan $A = 2\pi m R v$. För en partikel med konstant energi E, kan man visa att, bland alla tänkbara banor mellan två fixa punkter, den verkliga banan kommer vara den för vilken verkan A har ett extremvärde, dvs maximum eller minimum. Detta brukar kallas minsta verkans princip.

A3	Minsta verkans princip innebär att en partikel inom ett område med konstant potential kommer att röra sig längs en rät linje mellan två fixa punkter. De två fixa punkterna O and P i Fig. 1 har koordinaterna (0,0) och (x_0, y_0) och punkten där partikeln passerar region I till region II har koordinaterna (x_1, α). Notera att x_1 är fix och att verkan bara beror på koordinaten α. Härled ett uttryck för verkan $A(\alpha)$. Använd minsta verkans princip för att uttrycka v_1/v_2 i de givna koordinaterna.	**1.0**

B Extremprincipen i optiken

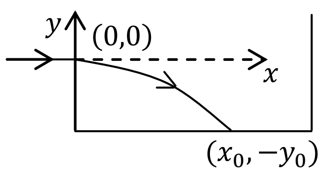
En ljusstråle rör sig från medium I till medium II, med brytningsindex n_1 respektive n_2, separerade av en linje parallell med x-axeln. Strålen bildar en vinkel i_1 med y-axeln i medium I, respektive i_2 i medium II (se figur. 2). För att bestämma strålens bana använder vi en annan extremprincip, känd som Fermats princip om kortaste tid.



Figur 2

B1	Principen säger att en ljusstråle rör sig mellan två givna punkter längs en bana som gör tidsåtgången extrem. Härled sambandet mellan $\sin i_1$ och $\sin i_2$ från Fermats princip.	**0.5**

Fig. 3 visar en schematisk skiss av banan för en laserstråle som infaller horisontellt mot en behållare med sockerlösning, där sockerkoncentrationen avtar med höjden. Som en följd avtar även lösningens brytningsindex med höjden.



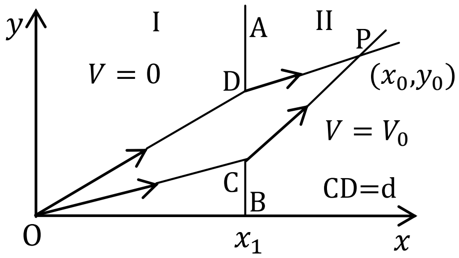
Figur 3: Behållare med sockerlösning.

B2	Antag att brytningsindex $n(y)$ bara beror på y. Använd ekvationen som erhölls i B1 för att ta fram ett uttryck för lutningen dy/dx av strålens bana, uttryckt i brytningsindex n_0 vid $y = 0$ och $n(y)$.	**1.5**
B3	Laserstrålen är vid infallspunkten (0,0) riktad horisontellt in mot sockerlösningen på höjden y_0 relativt tankens botten, så som visat i Figur 3. Sätt $n(y) = n_0 - ky$, där n_0 och k är positiva konstanter. Härled ett uttryck för x som funktion av y och övriga relevanta storheter för laserstrålens väg. Du kan använda: $\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) +$ konstant, där $\sec\theta = 1/\cos\theta$ eller $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) +$ konstant.	**1.2**

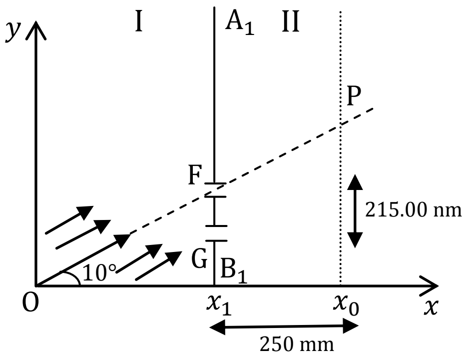
B4	Finn värdet på x_0, den punkt där strålen träffar tankens botten. Sätt $y_0 = 10{,}0\ \text{cm}$, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}050\ \text{cm}^{-1}$ (1 cm = 10^{-2} m).	**0.8**

C Extremprincipen och materiens vågegenskaper

Vi ska nu undersöka om Newtons andra lag och minsta verkansprincipen kan kombineras genom att identifiera vågnaturen hos partiklar i rörelse med de Broglie-vågor. Vi antar att en partikel som rör sig från O till P kan följa vilken bana som helst, och söker en bana som innebär konstruktiv interferens mellan de Broglie-vågorna.

C1	Antag att partikeln rör sig en infinitesimal sträcka Δs längs sin bana. Visa hur de Broglie-vågens fasändring $\Delta\varphi$ beror på ändringen i verkan ΔA och Plancks konstant.	**0.6**
C2	Liksom i del A rör sig nu en partikel från O till P (se Figur 4). Sätt en ogenomtränglig vägg längs gränsen AB mellan områdena. Väggen har en liten öppning CD med bredd d sådan att $d \ll (x_0 - x_1)$ och $d \ll x_1$. Betrakta de båda extrembanorna OCP och ODP, där OCP ligger längs den klassiska banan som behandlades i del A. Beräkna fasskillnaden $\Delta\varphi_{\text{CD}}$ mellan de båda banorna i linjär ordning i d.  **Figur 4**	**1.2**

D Materievågors interferens



Figur 5

En elektronkanon i O sänder ut en tunn elektronstråle mot en smal spalt F i den ogenomträngliga väggen A_1B_1 vid $x = x_1$, så att OFP är en rät linje. P är en punkt på en skärm vid $x = x_0$ (se Figur 5). Farten i I är $v_1 = 2{,}0000 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$ och $\theta = 10{,}0000^\circ$. Potentialen i II gör att farten $v_2 = 1{,}9900 \times 10^7\ \text{m s}^{-1}$. Avståndet $x_0 - x_1$ är 250,00 mm (1mm $= 10^{-3}$m). Bortse från växelverkan mellan elektronerna.

D1	Beräkna accelererationsspänningen U_1, givet att elektronerna accelereras från vila i O.	**0.3**
D2	En likadan spalt G görs i väggen A_1B_1 på avståndet 215,00 nm (1nm $= 10^{-9}$m) under spalten F (Figur 5). Beteckna fasskillnaden mellan de Broglie-vågorna som kommer genom spalterna till P från F respektive G med $2\pi\beta$, och beräkna β.	**0.8**
D3	Vilket är avståndet Δy från P till den närmaste punkt där man förväntar sig att inga elektroner träffar skärmen? [Obs: approximationen $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$ kan vara användbar.]	**1.2**
D4	Strålen har en kvadratisk tvärsnittsarea $500\ \text{nm} \times 500\ \text{nm}$ och uppställningen är 2 m lång. Vad är det minsta värdet på intensiteten I_{min} (antal elektroner per area och tidsenhet) för att det i genomsnitt ska finnas minst en elektron i uppställningen vid varje tidpunkt?	**0.4**

Fråga	Svar	Poäng
A1	$v_2 =$	**0.2**
A2	$v_2 =$	**0.3**
A3	$A(\alpha) =$ $v_1/v_2 =$	**1.0**
B1		**0.5**
B2	$dy/dx =$	**1.5**
B3	$x =$	**1.2**
B4	$x_0 =$	**0.8**
C1	$\Delta\varphi =$	**0.6**
C2	$\Delta\varphi_{CD} =$	**1.2**

D1	$U_1 =$	**0.3**
D2	$\beta =$	**0.8**
D3	$\Delta y =$	**1.2**
D4	$I_{\min} =$	**0.4**