



### Bengt E Y Svensson

är professor emeritus i teoretisk fysik vid Lunds universitet. Han har under senare år intresserat sig för det kvantmekaniska mätproblemet, särskilt så kallade svaga mätningar, och vilken betydelse man kan ge ett "svagt värde". Han är en flitig skribent, även i dagspressen, och har under många år ägnat sig åt att göra kvantmekanik, och modern fysik över huvud taget, begriplig för en bred intressekrets.

Kvantmekanikens resultat ter sig ofta paradoxala för våra klassiskt skolade hjärnor. Men vad är det egentligen i teorins ramverk som ligger bakom konstigheterna? Bengt E Y Svensson är vår ciceron i underlandet, och introducerar oss här till några av de mest välkända kvantmysterierna.

*Bilden: En-partikel-interferens mellan stora molekyler.  
Se vidare på sid 27.*

# Kvantmekaniska paradoxer

När man stöter på kvantmekaniken för första gången upplevs den av de flesta som svår. Jämfört med till exempel klassisk mekanik är den heller inte alls åskådlig. Den använder en matematisk formalism som kanske i sig inte är så mycket svårare än den som används i klassiska mekaniken, åtminstone inte i dennas mera avancerade formuleringar. Det svåra ligger snarare i den ovanliga och inte särskilt intuitiva uppbyggnad som kvantmekaniken har. Bara det att den på ett väsentligt sätt använder komplexa tal – den kvantmekaniska vågfunktionen är för det mesta komplex – innebär att den inte kan ges en omedelbar, åskådlig tolkning: när vi beskriver resultat av experiment eller när vi formulerar experimentnära naturlagar använder vi ju reella tal. Och även om real- och imaginärdelen av ett komplext tal är reella, så hör de så intimt ihop i den kvantmekaniska vågfunktionen att det inte på något rimligt sätt går att behandla dem var för sig. Däremot kan faktiskt, som vi snart skall se, vågfunktionens absolutbelopp och dess (relativa) fas – båda reella tal – ges meningsfulla tolkningar i kvantmekaniken.

Från början när man stiftar bekantskap med kvantmekaniken får man därför finna sig i att acceptera en icke-intuitiv formalism i form av ett antal regler eller postulat som till en början kan uppfattas som rätt konstgjorda. Dessa kan vara av rent matematiskt slag, som att det finns en vågfunktion som uppfyller en rörelseekvation, Schrödingerekvationen. De kan också vara ett slags blandning av matematik och fysik, som när man postulerar att varje fysikalisk storhet – läge, rörelsemängd, energi, rörelsemängdsmoment, etc. – skall beskrivas av en operator, ja till och med en självadjungerad sådan. De kan också vara "översättningsregler" från matematiken till fysiken, med andra ord regler för vad de matematiska storheterna har för fysikalisk betydelse. Hit hör postulat som att vågfunktionens absoluta värde i kvadrat på ett föreskrivet sätt har att göra med sannolikhet och att egenvärdena till en operator svarande mot en fysikalisk storhet är de enda värden som kan erhållas

när man mäter denna storhet. En alldeles speciell roll i formuleringen av dessa grundregler spelar för övrigt just begreppet mätning, som behandlas utförligare i Erik Karlssons artikel i denna volym. Därför fördjupar jag mig inte här i mätbegreppet utan utgår här från att vi har en mer eller mindre intuitiv föreställning om vad som menas med att mäta. Efter hand kommer jag att göra de preciseringar som blir nödvändiga.

Även om den kvantmekaniska *formalismen* kan upplevas som ogripbar så är den inte paradoxal, i varje fall inte i den meningen att den strider mot experiment. I själva verket utgör de kvantmekaniska reglerna ett synnerligen framgångsrikt ramverk. Det behöver oftast kompletteras med mera specifika antaganden som är nödvändiga för att beskriva ett konkret experiment eller fenomen. När man gör detta har man en teori som kan redogöra för *alla* de fenomen och iakttagelser som gjorts på atomär och subatomär nivå (och också för mera makroskopiska fenomen där kvantmekaniken låter sig tillämpas). I denna mening är kvantmekaniken en helt oöverträffad teori.

Det paradoxala uppkommer när man vill förstå vad som egentligen sker i det som synes ske, det som kvantmekaniken rent experimentellt beskriver så väl. Är det våg eller partikel som gäller? Kan en partikel samtidigt befinna sig på olika platser? Är Schrödingers katt död eller levande? Kan kvantmekanisk ”spöklik avståndsverkan” användas för att skicka meddelanden i överljusfart? Är den kvantmekaniska sannolikhetstolkningen grundläggande eller finns det en underliggande, deterministisk beskrivning i form av dolda variabler?

Flera av kvantmekanikens väl bekräftade förutsägelser verkar faktiskt strida mot det sunda förnuftet. Kan en partikel som passerar genom en spalt i en skärm verkligen ”känna av” om en annan spalt i skärmen är öppen eller stängd? Och mera filosofiskt: finns det över huvud taget en ”verklighet” som kvantmekaniken beskriver? Vilka egenskaper skulle i så fall denna ”verklighet” ha?

Vad är då det vi kallar sunda förnuftet för något? För att göra en lång historia kort: det sunda förnuftet innefattar den uppfattningen om vår omvärld som människan har tillägnat sig genom århundradena, ja genom många årtusenden. I fysiken beskrivs den av det vi kallar den klassiska fysiken: Newtons mekanik, Maxwells elektromagnetism, etc. Dessa teorier arbetar med påtagliga, åskådliga begrepp. Den newtonska mekaniken formuleras explicit

med hjälp av storheter som läge, hastighet, kraft, m.m., alla i hög grad påtagliga och åskådliga och dessutom mer eller mindre direkt mätbara. Och inom elektromagnetismen har begreppet elektriska och magnetiska ”fält” likaså fått en påtaglig och direkt mätbar innebörd. Skillnaden är stor mot kvantmekaniken: Vad betyder ”egentligen” en kvantmekanisk vågfunktion? Hur skall man ”tolka” en operator? Det är just i brytningen mellan det sunda förnuftet i denna mening och de kvantmekaniska förutsägelserna som de paradoxer uppstår som jag behandlar i denna artikel.

## Dubbelspaltexperimentet

Till de mest omskrivna underligheterna i kvantmekaniken hör dubbelspaltexperimentet. Principerna för experimentet framgår av figur 1. En stråle av elektroner från en elektronkanon riktas mot en spaltskärm med två spalter, S1 och S2. De elektroner som passerar genom någon av spalterna får träffa en annan skärm som fungerar som detektor. Denna kan till exempel bestå av något scintillerande material, så att varje elektron som träffar skärmen ger upphov till en liten blix i en väl avgränsad punkt. Man räknar blixarna och kan på så sätt bestämma hur många elektroner som träffar ett visst område på skärmen. Vid beskjutning med många elektroner blir denna blixttäthet ett direkt mått på sannolikheten för att en elektron skall träffa just detta område.

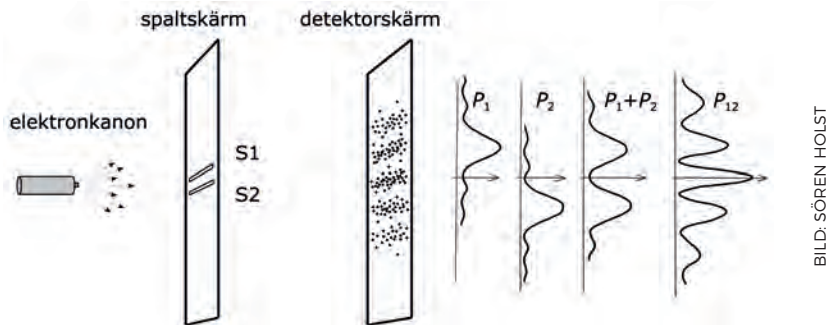


BILD: SÖREN HOLST

Figur 1: Principskiss av uppställningen för dubbelspaltexperimentet. De två fördelningskurvorna  $P_1$  och  $P_2$  anger fördelningen när endast en av spalterna, S1 respektive S2, är öppen. Kurvan  $P_1 + P_2$  är summan av  $P_1$  och  $P_2$  och den fördelning man väntar sig för klassiska partiklar när båda spalterna är öppna. Det faktiska utfallet för elektroner när båda spalterna är öppna ges av fördelningen  $P_{12}$ .

Låt oss nu jämföra denna sannolikhet för tre olika delförsök med uppställningen:

1. *Spalten S1 är öppen men spalten S2 är stängd.*  
Blixtfördelningen, dvs. sannolikhetsfördelningen för elektronerna, kommer då att se ut ungefär som kurvan  $P_1$  i figuren visar.
2. *Spalten S2 är öppen men spalten S1 är stängd.*  
På liknande sätt kommer sannolikhetsfördelningen för elektronerna att bli ungefär som kurvan  $P_2$  i figuren visar.
3. *Båda spalterna är öppna.*  
Sannolikhetsfördelningen visar sig nu se ut som kurvan  $P_{12}$  i figuren.

Dessa resultat är väl bekräftade av experiment.

Den första paradoxen knuten till detta utfall gäller frågan om elektronen är en partikel eller en våg. Å ena sidan tyder den detaljerade formen på sannolikhetsfördelningen  $P_{12}$  på att elektronen uppför sig som en våg. Denna form utgör nämligen ett så kallat interferensmönster, av precis det slag som hade uppstått om vanliga vågor hade passerat genom spalterna. Å andra sidan ger sig en elektron alltid tillkänna genom en blix i en väl lokaliserad punkt på skärmen, det vill säga som en partikel. I någon mening måste alltså en elektron tillskrivas både våg- och partikelegenskaper!

Ännu svårare för sunda förnuftet att förstå är följderna av följande resonemang kring utfallet av experimenten.

Alldeles oberoende av den detaljerade formen på kurvorna  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_{12}$ , visar experimentet helt klart att

$$P_1 + P_2 \neq P_{12}.$$

Till exempel kan det finnas punkter på detektorskärmen som inte träffas av någon elektron alls när båda spalterna är öppna trots att punkten träffas av många elektroner när bara en av spalterna är öppen; också det omvända kan inträffa.

Här finns en djup paradox: Sunda förnuftet, den klassiskt-fysikaliska föreställningen, fordrar att täthetsfördelningen, alias sannolikhetsfördelningen, i fallet med båda spalterna öppna borde



bli summan av fördelningen  $P_1$  när enbart spalten S1 är öppen och fördelningen  $P_2$  när bara spalten S2 är öppen.

Kanske är det så att elektronerna som går genom olika spalter påverkar varandra? Men nej! Man kan nämligen göra experimentet med en så tunn elektronstråle att bara en elektron i sänder skickas mot spaltskärmen. Då byggs täthetsfördelningarna upp mycket långsammare men efter tillräckligt lång tid kommer de att se precis likadana ut som när man skjuter många elektroner samtidigt. Det verkar således som om varje enskild elektron som passerar spaltskärmen på något sätt ”känner av” – dvs. påverkas av – om en eller två spalter är öppna. Notera också att det i fördelningen  $P_{12}$  inte finns någon som helst information om vilken spalt en viss elektron har passerat.

Men kan man då inte direkt *mäta* vilken spalt elektronen rör sig genom? Eftersom en elektron är laddad går detta bra utan att i övrigt störa elektronen: sätt en känslig strömmätare vid en av spalterna och se om den ger ett utslag (en elektron har passerat genom den spalten) eller inte (elektronen har gått genom den andra spalten). Åter händer något paradoxalt: om man genom sådana mätningar vet genom vilken spalt elektronerna har gått får man inte längre fördelningen  $P_{12}$  utan just en summa av  $P_1$  och  $P_2$ ! Inte nog alltså med att varje elektron känner av om båda spalterna är öppna eller om bara en är öppen, den känner också av om apparaturen med båda spalterna öppna kan avgöra vilken spalt elektronen har passerat!

Hela denna till synes paradoxala situation kan kvantmekaniken återge fullständigt i överensstämmelse med de experimentella resultaten. Kvantmekaniskt beskrivs nämligen elektronerna av en (komplexvärd) vågfunktion  $\Psi_{12}$  som till höger om spaltskärmen är summan av två (komplexvärda) funktioner

$$\Psi_{12} = \Psi_1 + \Psi_2$$

där  $\Psi_1$  (respektive  $\Psi_2$ ) beskriver elektroner som går genom spalt S1 (respektive S2).

Den kvantmekaniska regeln för tolkning av vågfunktionen säger att dess absolutkvadrat representerar sannolikheten. För dubbelspaltexperimentet innebär detta att de relevanta sannolikheterna ges av

$$P_1 = |\Psi_1|^2 \text{ och } P_2 = |\Psi_2|^2$$

medan

$$\begin{aligned} P_{12} &= |\Psi_{12}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \\ &\quad + 2\text{Re}\{\Psi_1^* \Psi_2\} = \\ &= P_1 + P_2 + \text{interferensterm.} \end{aligned}$$

(Här betyder  $|\Psi_1|^2$  absolutkvadraten av  $\Psi_1$ , och likadant för  $|\Psi_2|^2$  och  $|\Psi_{12}|^2$ ; "Re" står för realdelen, och  $\Psi_1^*$  är komplexkonjugatet av  $\Psi_1$ .)

Dessa ekvationer talar om för oss hur kvantmekanikens formalism kan återge experimenten: för komplexa vågfunktioner  $\Psi_1$  och  $\Psi_2$  måste den av sunda förnuftet förväntade fördelningen  $P_1 + P_2$  kompletteras med en *interferensterm*  $2\text{Re}\{\Psi_1^* \Psi_2\}$ . Observera att ekvationerna är helt oförändrade om man gör det ömse-sidiga bytet  $1 \leftrightarrow 2$ , dvs. de ger ingen preferens åt någondera av spalterna S1 eller S2: den kvantmekaniska formeln kan inte användas för att säga något om vilken spalt elektronerna går genom.

Dessa ekvationer ger alltså den fysikaliska tolkningen av en vågfunktions absolutbelopp, som sannolikheten att observera elektronen på ett visst ställe. Detta absolutbelopp är således en mätbar storhet. Att det ingår en interferensterm  $2\text{Re}\{\Psi_1^* \Psi_2\}$  i uttrycket för  $P_{12}$  säger att denna sannolikhet dessutom beror på den relativa fasen mellan vågfunktionerna  $\Psi_1$  och  $\Psi_2$ . Även denna fas utgör alltså en mätbar storhet.

Hur blir det då i fallet när man mäter vilken väg partikeln gått? Kvantmekaniken återger det korrekta svaret även i detta fall, dvs. den "klassiska" fördelningen  $P_1 + P_2$ . Regeln för kvantmekaniska mätningar säger nämligen att om man mäter partikelpassagen genom spalten S1 och finner att partikeln gått genom denna spalt så "kollapsar" vågfunktionen från  $\Psi_{12}$  till  $\Psi_1$ . Om man däremot finner att den inte gått genom S1 utan istället genom S2 så "kollapsar" vågfunktionen från  $\Psi_{12}$  till  $\Psi_2$ . I sannolikhetsbeskrivningen innebär detta att man då måste addera de båda sannolikheterna  $P_1 = |\Psi_1|^2$  och  $P_2 = |\Psi_2|^2$  och alltså få den klassiskt förväntade fördelningen  $P_1 + P_2$  utan någon interferensterm.

Argumentet kring mätpåverkan kan faktiskt föras ytterligare ett steg. Som man kan visa med hjälp av lite mera komplicerade

uppställningar än i dubbelspaltexperimentet, behöver man inte ens tänka sig att *göra en mätning* för att interferenstermer skall försvinna. Det räcker med att själva uppställningen gör det *möjligt* att fastställa vilken väg partikeln tagit. Jag avstår från att redovisa denna argumentation och hänvisar till artikeln av Mandel i lästipsen nedan.

Ok då, säger du, kvantmekaniken ger en formel som stämmer med experimenten. Men innebär detta en *förklaring* till vad som försiggår? Med rimliga krav på vad en förklaring innebär, måste nog svaret bli nej. Den store amerikanske fysikern Richard Feynman talar för alla när han säger att dubbelspaltexperimentet ”visar kvantmekanikens kärna” och att ”det är omöjligt, absolut omöjligt, att förklara på något som helst klassiskt sätt”.

Vad säger då dubbelspaltexperimentet kring frågan om en elektron är en våg eller en partikel? Det närmaste man kan komma ett svar är nog att säga att så länge man inte *mäter* var elektronen hamnar på skärmen – så länge dess läge inte registreras – beskriver teorin den som en våg, på något sätt utbredd i rummet. Men så snart man *mäter* dess läge – ser en blixtnärhet i en punkt på skärmen – måste elektronen beskrivas som en partikel utan utbredning. Själva *mätprocessen* har alltså i kvantmekaniken ett avgörande inflytande på beskrivningen. Jag hänvisar till artikeln om mätningar för ytterligare aspekter på denna fråga.

Ytterligare en fråga som dubbelspaltexperimentet kan belysa rör gränsen mellan kvantmekaniskt och klassiskt beteende: Hur stor eller tung måste en partikel vara för att den skall kunna beskrivas med klassisk mekanik istället för med kvantmekanik? Uppenbarligen finns orsakerna att söka i när interferenstermerna spelar någon roll i förhållande till när de inte gör det. Idag finns inget klart svar på denna fråga. Låt mig bara notera att man faktiskt lyckats påvisa kvantmekaniskt beteende – alltså med inverkan från interferenstermerna – i dubbelspaltexperiment med rätt stora molekyler, såsom ”kolbollarna” – fullerenerna –  $C_{60}$  och  $C_{70}$ .

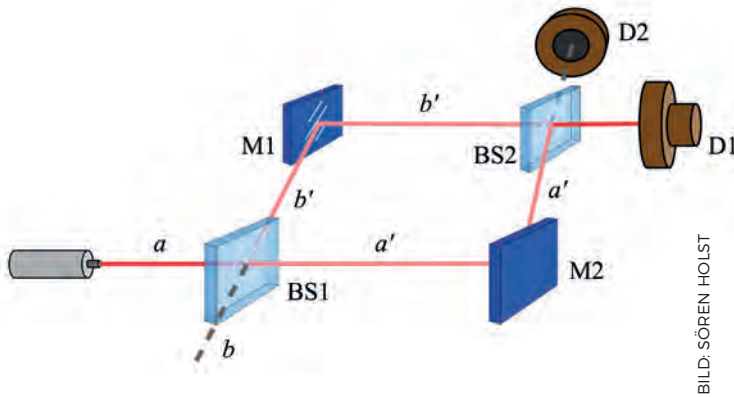
### **Mach-Zehnder interferometern, MZI**

Dubbelspaltexperimentet uppvisar alltså, enligt Feynman, hela kvantmekanikens problematik. En annan experimentell uppställning som också kan användas för att belysa kvantmekaniska underligheter är en Mach-Zehnder interferometer, fortsättningsvis förkortad MZI. Namnet syftar på att uppställningen först före-



slogs 1891 av den schweiziske fysikern Ludwig Zehnder, varefter den tyske fysikern Ludwig Mach – son till den mera välkände Ernst Mach – 1892 föreslog vissa förbättringar.

I första hand används en MZI för att påvisa interferens hos ljus som vågrörelse. Men eftersom ljus utgörs av fotoner, dvs. också har partikelegenskaper, lämpar sig en MZI utmärkt för att illustrera den kvantmekaniska dualismen mellan våg och partikel. Och fastän det praktiska utförandet rör fotoner kan man, åtminstone i princip, föreställa sig en MZI också för till exempel elektroner.



Figur 2: Principerna för en Mach-Zehnder interferometer (MZI).

Principerna för en MZI framgår av figur 2. Fotoner – i praktiken är det fråga om laserljus av bestämd våglängd – från en ljuskälla faller in genom en kanal  $a$  mot ingången BS1. Dess huvudsakliga komponent är en halvgenomskinlig spegel som tjänstgör som stråldelare ("beam-splitter" på engelska): laserstrålen (eller fotonerna) kan rent slumpmässigt antingen speglas in i kanalen  $b'$  eller släppas igenom till kanalen  $a'$ . I vardera kanalen  $a'$  och  $b'$  finns en spegel, M1 respektive M2, som reflekterar ljuset mot utgången BS2. Dess huvudkomponent är också en halvgenomskinlig spegel som antingen rent slumpmässigt kan reflektera fotonerna, eller släppa igenom dem, så att de når den ena eller den andra detektorn.

Figuren visar en uppställning med laserstrålen riktad mot ingången BS1 från vänster genom kanalen  $a$ . Det går precis lika bra att tänka sig att ljuset riktas mot BS1 från kanalen  $b$ . Att ljuset kan falla in mot en stråldelare från båda hållen är för övrigt det som

gäller för utgången BS2, där ljuset ju kommer från båda kanalerna  $a'$  och  $b'$ .

I de teoretiska resonemang som följer antar jag genomgående att MZI-apparaten är ”välavstämd”. Detta innebär att stråldelarna reflekterar precis 50% av det infallande ljuset och släpper igenom precis 50%. Det innebär också att den sträcka ljuset tillryggalägger längs de båda vägarna  $a'$  och  $b'$  är exakt lika. Inte heller finns det i grunduppställningen några som helst hinder i vägen för ljuset i de båda kanalerna.

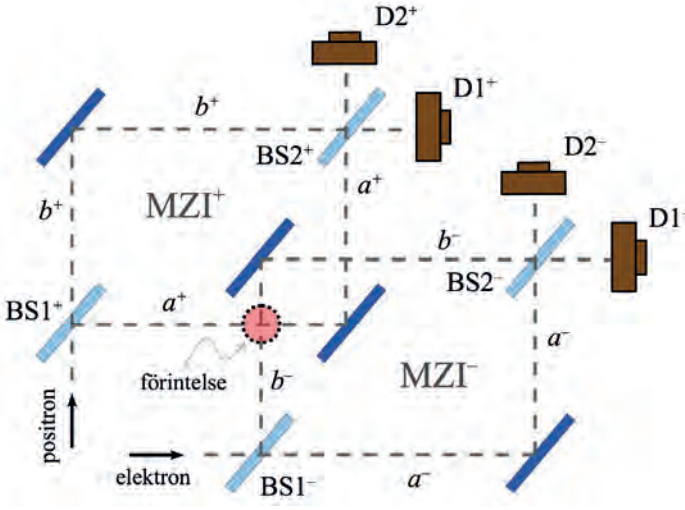
Hur fungerar då en MZI från en mera teoretisk synvinkel? Låt mig först utgå från att ljuset beskrivs av en (elektromagnetisk) våg. Då är det inte svårt att föreställa sig att vågen kan delas upp i två vågor i stråldelaren BS1 för att fortplanta sig längs kanalerna  $a'$  och  $b'$  fram till stråldelaren BS2, där de två vågorna kan interferera. En mera kvantitativ överläggning visar i själva verket att det i en välavstämd MZI sker fullständig (destruktiv) interferens i BS2. Med det menar jag att, när den inkommande ljustrålen riktas mot ingången BS1 bara via ingångskanalen  $a$ , så är det endast detektorn D1 – den detektor i figuren som känner av samma kanalriktning som den inkommande partikeln har – som registrerar något utgående ljus; inget ljus alls når detektorn D2. På motsvarande vis kommer ljus som kommer in mot BS1 via kanal  $b$  bara att registreras i detektorn D2 – alltså samma kanalriktning som den inkommande partikeln.

Den kvantmekaniska beskrivningen av ljuset som en våg – då inte som en elektromagnetisk våg utan som en sannolikhetsvåg, dvs. vågfunktion – ger samma resultat. Det innebär att enskilda fotoner som faller in mot ingång BS1 genom kanalen  $a$  också nödvändigtvis måste lämna utgången BS2 så att de registreras enbart i detektorn D1, aldrig i detektorn D2.

Låt oss nu fundera lite på vad en partikeltolkning skulle medföra. Med fotoner som partiklar borde man kunna säga något om vilken väg,  $a'$  eller  $b'$ , som partikeln tar genom MZI. Men om man försöker mäta vilken av dessa vägar som fotonen tar så händer motsvarande sak som för partiklarna i dubbelspaltexperimentet: det sker inte längre någon interferens i stråldelaren BS2. Fotonerna har nu istället lika stor chans att registreras i detektorerna D1 och D2. Vardera detektorn klickar alltså i medeltal för varannan foton. Sammanfattningsvis: MZI-uppställningen visar också den på det Feynmanska ”kärnan-i-kvantmekaniken”-fenomenet.

## Hardys paradox

Den amerikanske fysikern Lucien Hardy har i en artikel från 1992 utvidgat detta resonemang med hjälp av en lite mera komplicerad MZI-uppställning. Det rör sig om ett tankeexperiment, men som med alla goda tankeexperiment är det i princip möjligt att utföra i praktiken. Uppställningen återges i figur 3.



Figur 3: Principerna för uppställningen som illustrerar Hardys paradox.

Hardy tänker sig två sammankopplade interferometrar: en  $MZI^-$  med elektroner och en  $MZI^+$  med positroner (positronen är elektronens antipartikel). Elektronerna skjuts in i  $a^+$ -porten i  $MZI^-$  mot stråldelaren  $BS1^-$  och kan röra sig i kanalerna  $a^-$  och  $b^-$  mot stråldelaren  $BS2^-$ . Enligt resonemanget tidigare kommer då, om bara  $MZI^-$  funnes, de utgående elektronerna att nå enbart detektorn  $D1^-$ , inte alls detektorn  $D2^-$ . Motsvarande gäller för  $MZI^+$ : med positronerna inkommande genom  $b^+$ -porten i  $MZI^+$  kommer alla positroner att nå detektorn  $D2^+$ , inga alls detektorn  $D1^+$ .

Nu föreställer sig Hardy att de två interferometrarna är sammankopplade genom att kanalerna  $b^-$  och  $a^+$  skär varandra. Detta skall innebära att en elektron som går  $b^-$ -vägen alltid kommer att träffa på en positron som går  $a^+$ -vägen. Hardy förutsätter nämligen också att elektroner och positroner skjuts in samtidigt i anordningen. Han antar vidare att de alltid annihileras varandra när de möts. Ett elektron-positronpar i  $b^-$ - $a^+$ -kanalerna förint

alltså, utan chans för vare sig positron eller elektron att nå någon av detektorerna. Eftersom de båda MZI nu inte längre är välavstämde – de ”stör” ju varandra via annihilationen – väntar man sig att alla detektorerna skall registrera partiklar: i MZI<sup>-</sup> kommer elektroner att registreras i båda detektorerna D1<sup>-</sup> och D2<sup>-</sup>, och i MZI<sup>+</sup> kommer positroner att registreras i båda detektorerna D1<sup>+</sup> och D2<sup>+</sup>. En mera ingående överläggning visar till och med att man får klick i *elektron*detektorn D2<sup>-</sup> bara om *positronen* har gått den med MZI<sup>-</sup> hopkopplade positronvägen  $a^+$  och därigenom kunnat påverka – förinta – *elektronerna* i MZI<sup>-</sup>. På samma sätt finner man att *positron*detektorn D1<sup>+</sup> bara klickar om *elektronen* har gått den med MZI<sup>+</sup> hopkopplade elektronvägen  $b^-$  och därigenom kunnat påverka *positronerna* i MZI<sup>+</sup>.

Nu kommer argumentets klo. Vad händer om *båda* detektorerna D2<sup>-</sup> och D1<sup>+</sup> klickar samtidigt? Enligt resonemanget ovan bör detta tyda på att *positronen* gått vägen  $a^+$  samtidigt som *elektronen* har gått vägen  $b^-$ . Men i så fall skulle de ju ha förintat varandra i skärningen mellan dessa båda vägar och alltså inte alls kunna nå någon detektor. Verkligen en paradox!

Den kvantmekaniska formalismen är fullständigt entydig: det förhåller sig precis så som jag har beskrivet det. Experimenten är också otvetydiga: de visar precis det som de teoretiska övervägandena kommer fram till.

Hur kan man då lösa upp denna Hardys paradox? Det skulle kräva en ordentlig djupdykning i formalismen för att göra detta, och kunskaper utöver vad jag hittills fordrat av läsaren. Låt mig bara sammanfatta med att säga att den fundamentala orsaken igen är kvantmekanisk interferens, liksom i dubbelspaltexperimentet, så att det åter är fråga om (en alternativ form av) Feynmans ”kvantmekanikens kärnfråga”.

## En kvantmekanisk variant av Zenos pilparadox

En av den antika grekiska filosofen Zenos paradoxer handlar om en flygande pil som i varje ögonblick av sin flykt befinner sig i ett bestämt läge. Den är alltså i varje läge i vila och kan, enligt Zeno, inte samtidigt vara i rörelse. Han drar slutsatsen att rörelse är en chimär. Den paradoxen är det lätt att genomskåda med hjälp av hur vi idag uppfattar hastighet som ett gränsvärde av lägesförändringen dividerad med tidsintervallet.

Kvantmekaniskt finns det en liknande paradox, men nu verklig och bekräftad av experiment. Denna kvantmekaniska Zeno-paradox rör mätning av en atomkärna som kan sönderfalla: om man mäter ifall atomkärnan sönderfallit och gör denna mätning med mycket korta tidsintervall – i idealfallet kontinuerligt – finner man att den aldrig sönderfaller!

Vi är ju vana vid att ett sådant sönderfall normalt sker exponentiellt: sannolikheten för att den sönderfallande atomkärnan *inte* skall ha sönderfallit efter en tid  $t$  är proportionell mot en exponentialfunktion  $e^{-\lambda t}$ , där  $\lambda$  är sönderfallskonstanten. Denna lag följer av kvantmekaniken. Men den kan bara härledas för medellånga tider: för små tider, liksom för långa tider, gäller andra funktionssamband.

För den exponentiella sönderfallssannolikheten:

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \dots$$

är den första icke-triviala termen *linjär* i tiden  $t$ . Som framgår av härledningen i sidorutan gäller dock i själva verket, för små tider, att sannolikheten  $P(t)$  att atomkärnan är kvar i utgångstillståndet har sin första, icke-triviala term *kvadratisk* i  $t$ :

$$P(t) = 1 - Kt^2 + \dots$$

där  $K$  är en positiv konstant.

Detta har dramatiska följder om vi betraktar vad som händer om man gör många, säg  $N$ , mätningar av atomkärnans tillstånd under, säg 1 sekund, med regelbundna tidsintervall  $1/N$ . Kom nu också ihåg att det kvantmekaniska mätpostulatet innebär att varje mätning med resultatet att atomkärnan är kvar i sitt ursprungstillstånd också så att säga startar om processen från början, dvs. återför kärnan till ursprungstillståndet. Sannolikheten  $P_N(t=1)$  att atomkärnan *inte* skall ha sönderfallit under denna sekund blir därför, med allt bättre noggrannhet ju större  $N$  är,

$$\begin{aligned} P_N(t=1) &= [P(t=1/N)]^N \approx [1 - K(1/N)^2]^N \approx \\ &\approx e^{-K/N} \rightarrow 1 \text{ för } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

I denna gräns med många ( $N$ ) mätningar inom ett givet tidsintervall (här 1 sekund) är det alltså alltmer osannolikt ju större  $N$  är att atomkärnan alls skall hinna sönderfalla!

### Sönderfallssannolikheten för små tider

Låt  $|\Psi(t)\rangle$  vara tillståndsvektorn för det system som vid tiden  $t = 0$  utgörs av den ännu inte sönderfallna atomkärnan. Sannolikheten  $P(t)$  för att atomkärnan vid tiden  $t > 0$  fortfarande *inte* skall ha sönderfallit ges då av absolutkvadraten av  $|\Psi(t=0)\rangle$ -komponenten av  $|\Psi(t)\rangle$ :

$$P(t) = |\langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle|^2$$

För att komma åt hur  $|\Psi(t)\rangle$ , och därmed  $\langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle$ , utvecklas med tiden använder jag mig av Schrödingerekvationen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

I min härledning behöver jag inte ange någon mera precis form för Hamiltonoperatoren  $H$  (mer än att den är en självadjungerad operator).

Betrakta nu  $|\Psi(t)\rangle$  för små tider. Då är en Taylorutveckling en god approximation:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t=0)\rangle + t \left[ \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \right]_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\Psi(t)\rangle \right]_{t=0} + O(t^3)$$

Ur Schrödingerekvationen följer att

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \right]_{t=0} = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi(t=0)\rangle$$

och – om jag för enkelhets skull antar att Hamiltonoperatoren  $H$  är oberoende av tiden  $t$  – att

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\Psi(t)\rangle \right]_{t=0} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle \right] \right]_{t=0} = \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^2 H^2 |\Psi(t=0)\rangle$$

För att kunna beräkna sannolikheten  $P(t)$  måste jag känna storheten  $\langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle$ . Denna ges av (om jag utnyttjar normeringen  $\langle \Psi(t=0) | \Psi(t=0) \rangle = 1$ )

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle &= 1 + t \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle \right]_{t=0} + \\ &\quad + \frac{1}{2} t^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle \right]_{t=0} + O(t^3) = \\ &= 1 + t \left[ \frac{-i}{\hbar} \langle \Psi(t=0) | H | \Psi(t=0) \rangle \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} t^2 \left[ \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^2 \langle \Psi(t=0) | H^2 | \Psi(t=0) \rangle \right] + O(t^3) \end{aligned}$$

Att notera här är att  $t^2$ -termen är reell, så enda bidraget till imaginärdelen kommer från den term som är linjär i tiden  $t$ . Eftersom absolutbeloppet av ett komplext tal är summan av kvadraterna på dess real- och



imaginärdelar ges då slutligen den sökta sannolikheten  $P(t)$  för att atomkärnan vid tiden  $t > 0$  inte skall ha sönderfallit av uttrycket

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle \Psi(t=0) | \Psi(t) \rangle|^2 = \\ &= 1 - \frac{t^2}{\hbar^2} \left( \langle \Psi(t=0) | H^2 | \Psi(t=0) \rangle - (\langle \Psi(t=0) | H | \Psi(t=0) \rangle)^2 \right) + \\ &\quad + O(t^3) = \\ &= 1 - Kt^2 + O(t^3) \end{aligned}$$

där  $K$  är en konstant (vilken, som framgår av härledningen, i sin tur ges av  $\hbar^{-2}\{\Delta H\}^2$ , där  $\Delta H$  är spridningen (obestämdheten) i energin i utgångstillståndet; detta samband utnyttjar jag dock inte vidare, mer än att notera att det direkt ger att  $K \geq 0$ ).

Notera speciellt att det inte finns någon term linjär i tiden  $t$  i uttrycket för  $P(t)$ ; det är detta förhållande som ger upphov till Zeno-effekten som den beskrivs i huvudtexten.

## Några slutreflektioner

I den här artikeln har jag beskrivit några av de underligheter som kvantmekaniken uppvisar. Den är, som Feynman säger om dubbel-spaltexperimentet, ”omöjlig, absolut omöjlig, att förklara på något som helst klassiskt sätt”. Detta är en orsak till att det fortfarande pågår en diskussion om olika så kallade tolkningar av kvantmekaniken; se artikeln av Erik Karlsson i denna volym. Det finns också en allmän känsla bland fysiker att kvantmekaniken, som den nu föreligger, inte är den slutgiltiga teorin för mikrokosmos. Men hur en sådan ännu mera grundläggande teori skulle se ut finns det ingen enighet om.

Låt mig sammanfattningsvis peka på de egenskaper i den kvantmekaniska formalismen som jag ser som de viktigaste orsakerna till den Feynmanska ”omöjligheten”.

Hur kvantmekaniken beskriver *mätningar* finns alltid i bakgrunden för dessa ”omöjligheter”. Det är bland annat när denna mätproblematik kopplas samman med *överlagringsprincipen* (även kallad *superpositionsprincipen*) som underligheterna uppstår. Jag hänvisar till artikeln av Erik Karlsson för en mera ingående behandling av denna problematik.

Ett annat särdrag för kvantmekaniken är det som kallas *sammanflätning* (engelskans ”entanglement”, tyskans ”Verschränkung”). (Detta behandlas mera ingående i artikeln av Jan-Åke Larsson i denna volym.) Kortfattat uppträder kvantmekanisk

sammanflätning när man skall beskriva ett fysikaliskt föremål med fler än en frihetsgrad, till exempel ett två-partikel-objekt. För att beskriva ett sådant objekt använder man sig av en vågfunktion som är en produkt av två eller flera vågfunktioner, en för varje frihetsgrad. I allmänhet behöver man dock en överlagring (på engelska "superposition") av sådana produktvågfunktioner – frihetsgraderna är då sammanflätade. Sådana överlagringar kan uppvisa diverse märkliga egenskaper. I vissa situationer, till exempel, innebär överlagringen att objektet i sin helhet har en viss bestämd egenskap trots att ingen av de ingående frihetsgraderna var för sig har bestämda egenskaper. Ett exempel: spinnkomponenten för ett två-partikel-objekt kan vara väldefinierad även om spinnkomponenterna för de båda partiklarna var för sig är helt slumpmässiga.

Sammantaget ser jag således de grundläggande orsakerna till "underligheterna" i kvantmekaniken just i samverkan mellan de kvantmekaniska principerna kring överlagring, mätning och sammanflätning. ❖

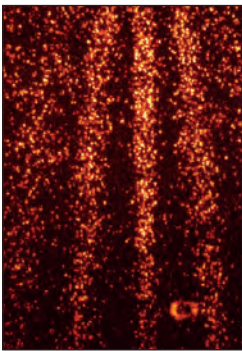
## För vidare läsning

En mycket bra populärvetenskaplig bok om kvantmekanik är David Lindley *Paradoxen som försvann* (Studentlitteratur, 2002). På lite mera avancerad nivå ligger Yakir Aharonov och Daniel Rohrlich *Quantum Paradoxes, Quantum Theory for the Perplexed* (Wiley-VCH Verlag, 2005).

Feynmans anmärkning om att det är omöjligt att förstå kvantmekaniken på klassisk grund finns i R. P. Feynman, R. B. Leighton och M. Sands, *The Feynman Lectures in Physics*, Volume 3, Section 1-1, Addison-Wesley (1965).

När och hur interferenstermer spelar roll behandlas i Leonard Mandel *Quantum effects in one-photon and two-photon interference*, *Reviews of Modern Physics*, 71, No 2, Centenary 1999, sid S274.

Hardys paradox lanserades i L. Hardy: *Quantum Mechanics, Local Realistic Theories, and Lorentz-Invariant Realistic Theories*, *Physical Review Letters* 68, 2981 (1992). (DOI: 10.1103/PhysRevLett.68.2981).



Vinjettbilden:  
En-partikel-interferens mellan stora molekyler. Se vidare Juffmann, T. et al, *Real-time single-molecule imaging of quantum interference*, *Nature Nanotechnology* 7, May 2012, 297. (DOI: 101038/NNANO.2012.34).  
Bild: Markus Arndt et al.