

FOTO: FREDRIK PERSSON

Annica Black-Schaffer

är professor i fysik vid Uppsala universitet. Hon växte upp på landet utanför Söderköping, disputerade i kondenserade materiens teori på Stanforduniversitetet i Kalifornien och är sedan 2011 verksam i Uppsala. Hon och hennes forskargrupp arbetar framförallt med teori om topologiska och okonventionella supraledare och söker bland annat efter Majoranafermioner i nya material.

Allt i vår omgivning består av atomer. Och eftersom atomer styrs av kvantfysik, är det kvantfysiken som ytterst avgör ett materials egenskaper. Men hur kan man använda kvantfysiken för att hantera och dra slutsatser om det enorma antal atomer som bygger upp ett material? Nyckeln visar sig vara något som kallas bandteori. Annica Black-Schaffer förklarar och visar vägen till topologiska isolatorer, supraledare och Majoranafermioner.

*Bilden: Ferromagnetiska atomer (blåa) på en supraledare (grå) kan ge upphov till Majoranafermioner (röda bollar).
Se vidare på sid 80.*

Kvantfysik i material: från transistorn till topologiska supraledare

Visst är det fascinerande med kvantparadoxer, interferenseffekter och andra besynnerligheter som kvantmekaniken ger upphov till, men har du funderat på var kvantmekaniken finns i det dagliga livet? Förvisso är många kvantfenomen väldigt känsliga för störningar, vilket gör att de oftast bara låter sig observeras under extrema omständigheter, såsom vid låga temperaturer och i vakuum. Ändå används faktiskt kvantmekanikens lagar varje gång du slår på datorn, tar upp mobiltelefonen eller sätter på diskmaskinen. Utan den kvantmekaniska förståelsen för material som fysiker började utveckla för nästan 90 år sedan, hade transistorn aldrig uppfunnits och därmed hade vi missat hela den IT-revolution vi nu lever mitt i.

Givetvis ska denna enorma samhällsutveckling också tillskrivas allt från elektronikingenjörer till datavetare, men det var fysiker som startade den. De tillämpade nämligen den nyupptäckta kvantmekaniken på solida kristallina material och uppfann då vad som har kommit att kallas *bandteori*. Med bandteori kan vi förstå så kallade halvledare och därmed den fundamentala fysiken bakom transistorn – denna briljanta konstruktion som låter oss reglera strömflöden på mikrometernivå, och numer även nanometernivå.

Här tänkte jag ta er med på en resa från elementär bandteori till 2016 års Nobelpris i fysik inom topologiska material, och avsluta med hur vi är på väg att upptäcka en helt ny och exotisk partikel kallad Majoranafermion, i helt vanliga material. Det är en resa där kvantmekaniken kommer till liv utanför labbet, både i mobiltelefonen och i framtidens kvantdator.

Materiefysik

Att tillämpa kvantmekanik på material kan tyckas ganska enkelt. Material består av atomer som var och en har ett fixt antal elektroner. Vi antar oftast att atomkärnorna sitter fast i ett solitt material (även om atomkärnornas rörelse ger upphov till ljud och värmetransport), så kvar är att bestämma vad elektronerna gör. Problemet är att det i bara några gram av ett material vanligen finns åtminstone i storleksordningen 10^{23} elektroner (Avogadros konstant). För alla dessa elektroner behöver vi lösa Schrödingerekvationen, en ekvation som blir synnerligen problematisk redan vid ett fåtal elektroner. Som tur är har fysiker utvecklat en metodik för detta som går under namnet mångpartikelfysik.

Det fascinerande är att samlingar av väldigt många elektroner kan bete sig fundamentalt annorlunda än när de bara är några få. Detta är egentligen inte alls konstigt – sådana kollektiva effekter finns i många sammanhang. Byt ut ordet elektron mot fisk och du inser snabbt att även om du vet allt om en enskild fisk så kan du fortfarande inte förstå de kollektiva rörelserna och beteendena hos ett helt fiskstim. Ett liknande samtida kollektivt fenomen är virala filmklipp: det är svårt att förutse vad som kommer att spridas som en löpeld i sociala medier eftersom detta beror på det kollektiva beteendet hos många användare snarare än på enskilda individer. Men det är inom materiefysiken som mångpartikelproblemet har studerats som ihärdigast.

Redan 1972 myntade den sedermera Nobelpristagaren Philip Anderson begreppet ”More is different”. Med detta ville han understryka att fysik inte bara är reduktionistisk, där naturen förstås utifrån dess minsta beståndsdelar, utan att centrala delar av fysiken handlar om egenskaper som endast uppkommer när vi har väldigt stora samlingar av partiklar. Dessa kollektiva fenomen kan inte ens anas om man insisterar på att bara studera ett fåtal partiklar. Många sådana kollektiva fenomen förstår vi redan, såsom kristallin ordning i kristaller, många typer av magnetism och de enklaste formerna av supraledning, men andra är fortfarande föremål för intensiv forskning.

Så, mer specifikt, hur studerar vi då materia med dess många elektroner? Framförallt behövs det bra tekniker för att hålla reda på 10^{23} elektroner. Ett av de mest kraftfulla knepet är att bara bry sig om de elektroner som ger materia dess fysiska egenskaper. Vi kan först ignorera allt utom elektronerna i de yttersta elektron-

skalen. De övriga elektronerna bidrar förvisso till den kemiska bindningen i materialet men som fysiker tar vi oftast den kemiska kompositionen för given. Dessutom är det oftast bara nödvändigt att hålla reda på elektronerna med lägst energi i förhållande till den så kallade *Fermienergin* E_F , vilket är den energi som ligger precis på gränsen mellan ockuperade kvanttillstånd och tomma. Anledningen är att dessa elektroner är lättast att påverka och därmed de som ger upphov till de flesta fysiska egenskaperna. Till exempel, om vi lägger på en spänning över en metall är det elektronerna vid E_F som har lättast att svara på denna störning och därmed ge upphov till en ström. Å andra sidan, i en isolator finns det inga elektroner vid E_F utan det är istället ett energigap där. Mitt emellan metaller och isolatorer återfinns *halvledarna*. Dessa har endast ett litet energigap vid E_F så med lite manipulation kan en ström flyta igenom dem.

Ofta pratar vi inte ens om elektronerna själva, utan om de så kallade *kvasipartiklar* som har lägst energi. I många material är kvasipartikeln en elektron med lite modifierade egenskaper som t.ex. en annan massa. Den effektiva massan hos en elektronkvasipartikel är den vanliga elektronmassan omskalad med en faktor som kommer från växelverkan med alla andra partiklar i materialet. Man kan tänka sig elektronkvasipartikeln som en elektron med ett moln av de andra partiklarna runt sig. Molnet fungerar som kläder och därmed har den ”klädda” elektronen en annan massa än den nakna elektronen. I vissa fall, när växelverkan mellan elektronerna är mycket stor, kan dock kvasipartiklarna skilja sig markant från elektronen. Ett exempel är Majoranafermionen som vi återkommer till senare.

Bandteori

Så hur gör vi då konkret för att utifrån ett materials kemiska sammansättning förutsäga dess fysiska egenskaper, som exempelvis ledningsförmåga? Det är här kvantmekaniken kommer in. Vi börjar med den tidsberoende Schrödingerekvationen för en enda elektron med massa m :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U\Psi = E\Psi$$

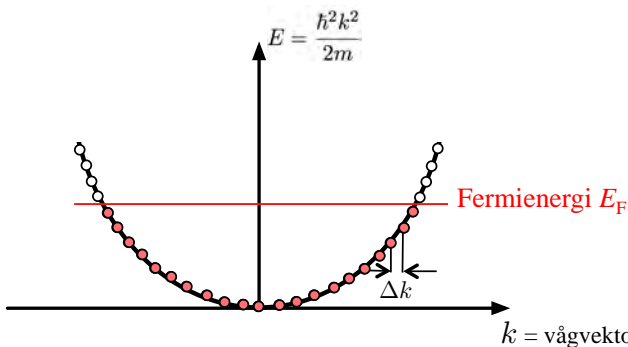
Här är Ψ vågfunktionen och E energin. Ekvationen är bara skriven för en rumsdimension (x) men kan enkelt utvidgas till alla tre

rumdimensionerna. För en fri elektron är potentialen U noll och därmed blir ekvationen extra enkel. Lättast löser man denna andra ordningens differentialekvation genom att använda något som kallas för en Fouriertransform, vilket tar oss till *det reciproka rummet*. Detta är ett abstrakt matematiskt rum där vi istället för längd har enheten 1/längd på koordinataxlarna, och där en punkt i rummet anges med en vektor k . En av de fiffiga sakerna med Fouriertransformen är att derivatan d/dx förvandlas till $-ik$, där i är det imaginära talet. Om vi gör denna substitution i Schrödingerekvationen ovan, och sätter $U = 0$, finner vi direkt för en fri elektron

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Energien formar alltså en parabol som funktion av vektorn k , se figur 1.

I ett ändligt system är dock inte alla k -värden tillåtna eftersom vågfunktionen måste vara noll utanför systemet. Om vi antar att systemet har längd L ger detta upphov till ett kvantiseringskriterium där bara $k = n \cdot 2\pi/L$ är tillåtet, med n ett heltal. När vi har många elektroner kan vi helt enkelt stoppa in dem alla i de tillåtna energinivåerna. I denna procedur måste vi följa Paulis princip som säger att det endast får plats en elektron per kvanttillstånd. Vi vill dessutom hitta grundtillståndet, dvs. tillståndet med minst energi, så vi fyller från botten och upp. När vi har slut på elektroner drar vi en linje och kallar denna energi E_F , och därmed har vi skapat



Figur 1: Bandstrukturen för fria elektroner med avstånd $\Delta k = 2\pi/L$ mellan varje tillåtet k -värde. Fermienergin E_F markerar gränsen mellan ockuperade tillstånd (röda cirklar) och tomma tillstånd (vita cirklar).

vår första bandstruktur. Denna bandstruktur är den exakta lösningen om elektronerna inte växelverkar med varandra, men detta är tyvärr inte riktigt sant. Om vi använder elektronkvasipartiklar istället för de nakna elektronerna (och därmed ändrar massan) så kommer vi dock oftast runt problemet att elektronerna växelverkar med varandra.

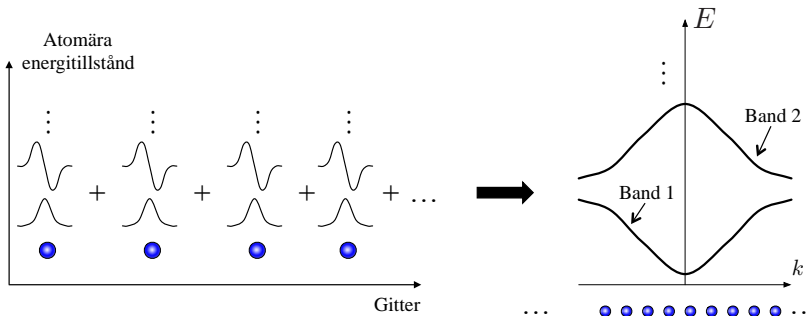
Ovan fann vi bandstrukturen för elektroner då U var noll. Men i material växelverkar elektronerna också med atomkärnorna, vilket ger upphov till en viss potential U . Låt oss fokusera på kristallina material – de är de vanligaste och också de som är lättast att förstå sig på. Här sitter atomerna i ett gitter med en viss periodicitet, så att det finns en så kallad enhetscell som upprepar sig i rummet. Även vågfunktionen måste då se mer eller mindre likadan ut i varje enhetscell. Felix Bloch visade att vågfunktionen i en kristall kan skrivas

$$\Psi_k = u_k(x)e^{ikx}$$

Här är $u_k(x)$ en funktion som har samma periodicitet som gittret, och där indexet k indikerar att funktionen beror på vågvektorn k . Vågfunktionen är alltså inte helt periodisk utan har en fas som kan variera mellan de olika enhetscellerna. Dock har vågfunktionens amplitud alltid samma periodicitet som gittret. Detta är nödvändigt eftersom beloppskvadraten av denna amplitud är elektrondensiteten, vilken rimligen bör ha samma periodicitet som gittret. Periodiciteten gör också att vågvektorn k begränsas i det reciproka rummet till ett område centrerat runt origo (den så kallade Brillouin-zonen). Detta medför att bandstrukturen endast behöver beräknas inom detta område i reciproka rummet. Vågvektorn k blir nu inte bara ett rent matematiskt begrepp utan kallas också kristallrörelsemängd och är en kvantitet som ingår i konserveringslagarna som styr kollisionsprocesser i materialet.

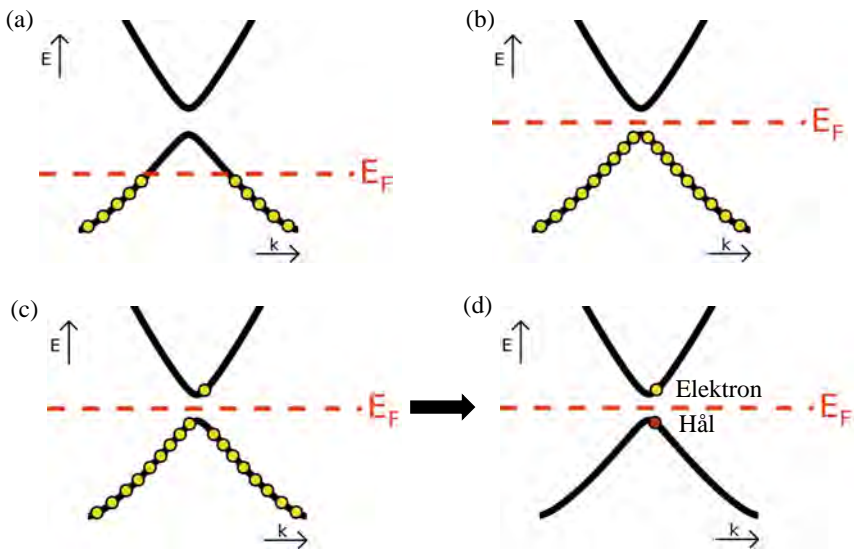
Med hjälp av Blochs teorem kan vi nu även finna vågfunktionerna och energierna för elektroner i ett kristallint material med ett periodiskt varierande U . Varje möjligt elektrontillstånd i en enskild enhetscell, ger nu upphov till vad som kallas för ett band för kristallen som helhet. Varje band har plats för N tillstånd enligt kvantiseringen som uppkommer, där N är totala antalet enhetsceller i kristallen. Detta är ganska naturligt och illustreras i figur 2. Tänk dig för enkelhetens skull att det bara finns en atom i varje enhetscell. Denna atom har många olika energinivåer med

tillhörande vågfunktioner som vi finner om vi löser Schrödinger-ekvationen endast för elektronerna som tillhör denna atom. Varje sådan vågfunktion kommer i kristallen att överlappa med motsvarande vågfunktion i de omgivande enhetscellerna och energinivåerna bildar då band: ett band per atomärt tillstånd och varje band innehåller ett tillstånd från varje enhetscell. Oftast är dock bandstrukturer mycket mer komplicerade: det finns oftast fler än en atom i varje enhetscell och dessutom kan de atomära tillstånden överlappa mycket med varandra. Det kan till och med uppstå högst oväntade effekter. En av dessa kommer vi snart stöta på i topologiska material.



Figur 2: Enskilda atomer (blå) med dess många energinivåer (vänster) bildar en bandstruktur (höger) med multipla band när de sätts tätt intill varandra. Varje band innehåller N tillåtna tillstånd som funktion av den reciproka vågvektorn k .

Även om bandstrukturen varierar väldigt mycket mellan olika material, finns det generella beteenden att ta fasta på. När vi väl har alla band fyller vi dem från botten och när antalet elektroner tar slut hittar vi E_F . Hamnar den mitt i ett band så betyder det att elektronerna är väldigt lättrorliga: en elektron nära E_F kan med bara en ytterst liten tillförsel av energi hoppa, eller exciteras, till ett tomt tillstånd. Det är detta som är en metall. Lutningen på bandet vid E_F ger dessutom hastigheten för dessa elektroner. Om däremot den sista elektronen vi placerar in gör att ett helt band blir fullt och det är ett energigap till nästa band, då finns det inga elektroner som lätt kan exciteras till andra tillstånd och vi har en isolator. Denna bild av excitationer är så behändig att vi oftast bara behåller slutresultatet: vi glömmar alla elektroner som sitter i sina vanliga tillstånd och bryr oss bara om de elektroner som har exciterats till



Figur 3: Bandstruktur för en metall (a) och en isolator (b), där gula cirklar representerar fyllda elektrontillstånd. En excitation i en isolator kräver en energi lika stor eller större än energigapet (c) och effektivt sett kan resultatet ses som en kombination av en elektron- och hålexcitation (d).

ett annat tillstånd och de ”hål” som de lämnade efter sig, se figur 3. På så vis slipper vi att hålla reda på alla 10^{23} elektroner och behöver bara tänka på elektron- och hål-excitationerna. Dessa är allt som oftast både få och dessutom koncentrerade runt E_F .

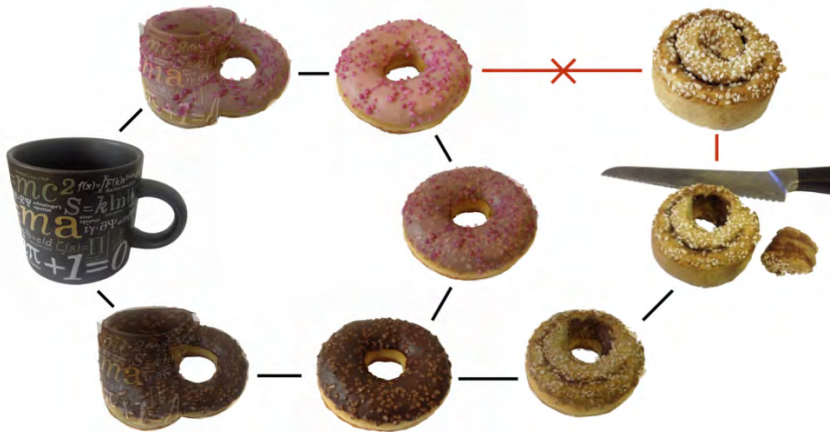
Bandteorin har trots sin enkelhet visat sig vara utomordentligt effektiv för att beskriva kristallina material. Även om den elektriska Coulombrepulsionen mellan elektronerna är stark, ger den oftast bara upphov till klädda elektroner. Mycket kraftfulla verktyg har utvecklats för att på ett noggrant sätt beräkna bandstrukturen hos kristallina material. Enda undantaget är då växelverkan mellan elektronerna är så stark att vi inte längre kan identifiera elektronkvasipartiklar. Dessa material kallas *starkt korrelerade* och utgör idag ett stort forskningsfält där många särdeles oväntade egenskaper dyker upp. Men, som vi nu ska se, behöver vi inte bege oss in i den korrelerade världen för att stöta på oanade effekter.

Topologi i materiefysiken

För material utan starka elektronkorrelationer verkade det länge som om vi visste allt eftersom bandteorin fungerar så bra. Detta

ändrade sig abrupt för ungefär tio år sedan då de första topologiska isolatorerna såg dagens ljus. Det fascinerade här är att materialen inte var nya – vissa användes till och med redan inom industrin – utan det var vår förståelse av dem som ändrades när topologi klev in och blev ett centralt begrepp också i materiefysiken och inte bara inom matematiken.

Topologi har att göra med den övergripande uppbyggnaden eller strukturen hos objekt. En enkel förståelse för topologi kan man få genom att helt enkelt räkna antalet hål hos ett objekt. Till exempel har bullen noll hål, munken ett, medan kringlan har två. Dessa tre objekt är därmed alla topologiskt olika. Sådana topologiskt distinkta objekt kan man inte varsamt och kontinuerligt deformera till varandra. Enda sättet att få en bulle att se ut som en munk är att använda en kniv, en process som varken är varsam eller kontinuerlig. En kaffekopp med ett öra är däremot topologiskt lika, eller ekvivalent med, munken. Urgröpningen där man håller kaffet är inget hål utan kan kontinuerligt utplånas så att kaffekoppen successivt formas till en munk där koppens öra till slut blir till hålet i munken, se figur 4. Ämnet topologi omfattar också hur man matematiskt beräknar hur många hål ett objekt har, utan



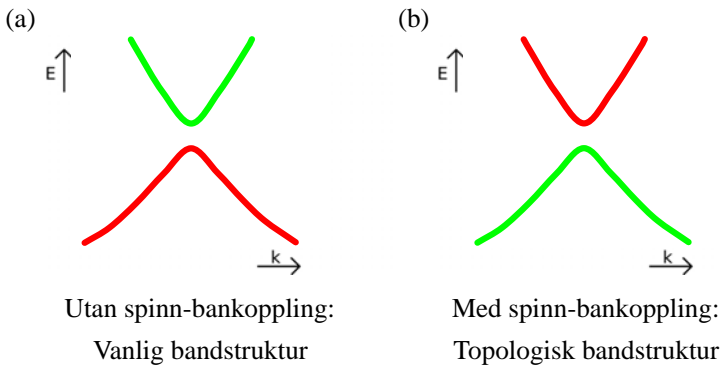
Topologi: kaffekopp = munk \neq bulle

Figur 4: Topologi hos bullar, munkar och kaffekoppar. Kaffekoppen kan kontinuerligt deformeras till alla sorters munkar, men bullen kan aldrig utan en kniv göras om till en munk. Alltså är kaffekoppen och munken topologiskt ekvivalenta, medan bullen är topologiskt skild från de andra två.

att först behöva visuellt inspektera det. Detta görs genom att först definiera en lokal krökning hos objektet, som anger hur objektets yta kröker sig i varje punkt. Om denna krökning sedan integreras över hela ytan erhålls ett tal som motsvarar antalet hål i objektet. Detta tal kallas för en topologisk invariant eller index, och det är ett heltal eftersom det inte går att ha halva hål.

Nu kanske du frågar dig vad hål i diverse bakverk har att göra med bandteori och fysik? Faktiskt en hel del! Fast det rör sig inte om hål i objekt som finns i vårt vanliga tre-dimensionella rum, utan om hål i abstrakta objekt uppbyggda av vågfunktioner i det reciproka rummet. Det hela är matematiskt ganska komplicerat och 2016 års Nobelpris i fysik gick just till David Thouless, Duncan Haldane och Michael Kosterlitz bland annat för att de visade oss hur detta fungerar. Något förenklat kan vi förstå detta genom att börja med en bandstruktur där då varje band representerar ett tillåtet energivärde som funktion av k , koordinaten i det reciproka rummet. Till varje tillåten energi hör ju ett $u_k(x)$, definierat i ekvationen ovan som den essentiella delen av vågfunktionen, ett $u_k(x)$ per band. Vi kan nu definiera en krökning för dessa $u_k(x)$ i det reciproka rummet, en krökning per band. Integrerar vi sedan dessa krökningsvärden på samma sätt som vi integrerade för att hitta hålen ovan, finner vi ett topologiskt index som kallas för Chern-talet. Chern-talet kan därmed ses som antalet ”hål” hos bandens vågfunktioner.

Chern-tal och liknande konstruktioner har de sista tio åren börjat användas flitigt för att förstå topologin, dvs. den övergripande uppbyggnaden, hos bandstrukturer och dess tillhörande vågfunktioner. Man är därmed inte bara intresserad av bandstrukturen i ett litet avgränsat område i det reciproka rummet som förut ofta var fallet, utan nu är hela den övergripande strukturen viktig. Det är ganska naturligt att man måste ha ett övergripande synsätt för att få fram topologiska egenskaper. Tänk dig en liten myra på ytan av en stor munk – den vet vilket sorts strössel munken har, men den har inte någon aning om att det också finns ett hål i mitten av munken. Det spännande i materiefysiken är att topologiska index inte bara är en matematisk lek utan faktiskt ger upphov till underliga fysiska fenomen som vi strax ska titta närmare på. Men först ska vi bekanta oss med ett enklare exempel på topologi i bandstrukturer.



Figur 5: Bandstruktur hos en normal (icke-topologisk) isolator med rött valensband och grönt ledningsband (a). När spinn-bankoppling läggs till blir bandstrukturen inverterad (b) och vi får en topologisk bandstruktur.

Topologisk bandteori

Grundläggande topologisk bandteori kan vi förstå utan att behöva använda komplicerad matematik – det räcker faktiskt med lite färgglada bilder! Tänk dig först en helt vanlig bandstruktur för en isolator, dvs. sådan att Fermienergin ligger precis mellan två band, som i figur 3(b). För enkelhetens skull kollar vi bara på valensbandet (det högsta ockuperade bandet) som vi färgar rött, och ledningsbandet (det lägsta tomma bandet) som vi färgar grönt, se figur 5(a). Färgerna representerar olika kvanttal, t.ex. vilken typ av atomorbitaler banden härstammar från, men det kan också vara andra egenskaper, exakt vad är inte viktigt. Sedan lägger vi på en relativistisk effekt som kallas spinn-bankoppling. Detta är en energi som uppkommer i materialet på grund av kopplingen mellan elektronernas spinn och deras banrörelse.

Spinnet är elektronens inneboende kvantmekaniska rörelsemängdsmoment. Det har inget att göra med hur elektronen rör sig, utan är ett kvanttal alltid kopplat till elektronen. Spinnet kan representeras som en pil och kan ta värdena $1/2$ (kallat upp-spinn) och $-1/2$ (ned-spinn) längs en godtycklig koordinataxel. I Schrödingerekvationen finns inte spinnet med, utan måste läggas till i efterhand. Det var Paul Dirac som lärde oss hur man gör detta då han lyckades formulera en relativistiskt korrekt kvantekvation år 1928. Som du kanske reflekterat över behandlar Schrödinger-

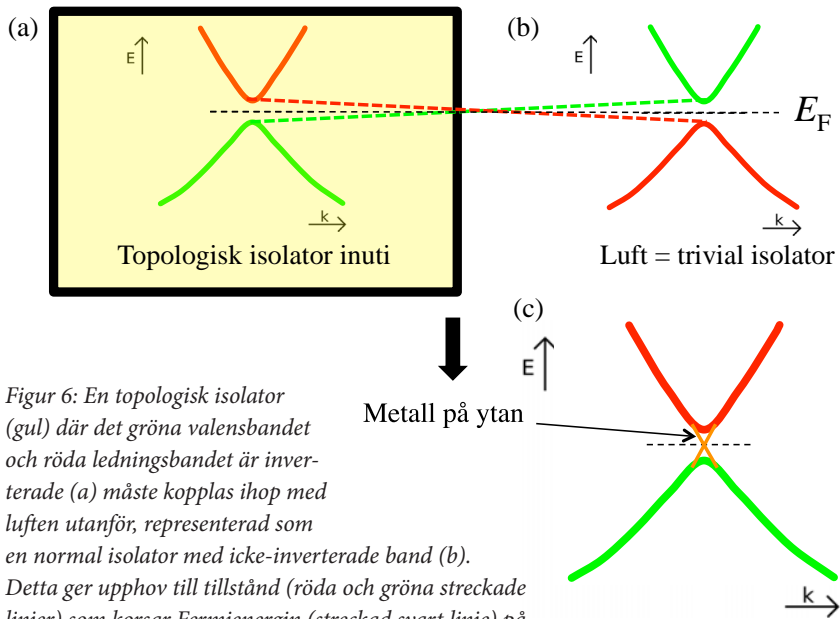
ekvationen inte tid och rum likvärdigt: den innehåller en första-derivata i tiden men en andraderivata i rummet. Detta går stick i stäv med Albert Einsteins relativitetsteori där rum och tid behandlas lika och förs samman till en rumtid. Priset vi får betala för den relativistiskt korrekta Diracekvationen är att vågfunktionen nu inte är en enkel funktion utan istället en vektor som består av fyra oberoende komponenter. Två av dessa komponenter behövs för att representera elektronens spinn. Varför de andra två komponenterna dyker upp var ursprungligen ett mysterium, men det visade sig att dessa representerar elektronens antipartikel, kallad positronen, och dess spinn. I materians värld har vi dock redan stött på denna antipartikel i form av hålet. Ett hål är ju avsaknaden av en elektron i bandstrukturen och därmed också den partikel som annihilerar en elektron. Vad som är viktigt för oss här är att Diracekvationen innehåller en energiterm som uppkommer då elektronens spinn växelverkar med dess rörelse. Precis som vi kan lägga till spinnet till Schrödingerekvationen så kan vi också inkludera denna spinn-bankoppling. På så sätt kan vi fortfarande använda Schrödingerekvationen och vår vanliga bandteori.

Spinn-bankoppling är speciellt viktig för tyngre grundämnen och den kan där ändra bandstrukturen en hel del. Den kan till och med göra så att banden byter plats med varandra, så att det röda bandet nu blir ledningsband och det gröna valensband, se figur 5(b). Detta kallas *bandinversion* och är ett sedan länge välkänt fenomen hos en del halvledare och isolatorer. Vad som hände för omkring tio år sedan var att fysiker för första gången beskrev denna bandinversionsprocess i termer av topologi. Genom att ha målat banden i olika färger ser vi direkt att man inte kan komma från den ena bilden till den andra utan att göra något drastiskt såsom att klippa och klistra. Alltså är de två bandstrukturerna, med och utan spinn-bankoppling, topologiskt olika. Materialet med den inverterade bandstrukturen kallar vi en topologisk isolator och den har också ett slags Chern-tal som är skilt från noll, medan den vanliga konfigurationen, utan spinn-bankoppling, är en normal isolator med Chern-talet lika med noll. Genom att matematiskt förstå skillnaden mellan dessa två bandstrukturer kan vi också förutspå nya oväntade effekter.

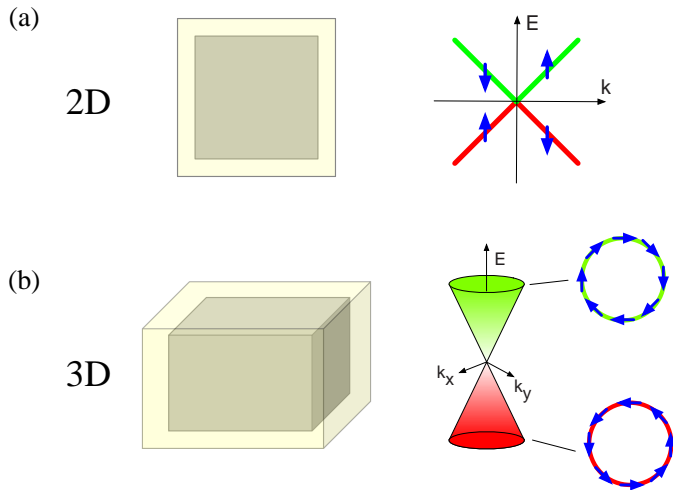
Topologiska yttillstånd

En av de mest intressanta följderna av topologisk bandteori är att mycket speciella tillstånd uppstår på ytan av topologiska material. I figur 6(a) har vi den inverterade bandstrukturen av en topologisk isolator inbäddad i luft. Luft kan man tänka på som en normal isolator med ett mycket stort energigap som i figur 6(b), eftersom det krävs en mycket stor energi för att leda ström genom luft – även om åska visar att det är fullt möjligt. På materialets yta måste dock de två olika bandstrukturerna fogas samman: rött band ska sitta ihop med rött och grönt med grönt. Detta leder till band som korsar Fermienergin någonstans i övergången mellan materialet och luften utanför. Alltså får vi tillstånd vid Fermienergin på ytan av materialet. Eller annorlunda uttryckt: ytan av en topologisk isolator är en metall! Det är topologin som garanterar att dessa metalliska yttillstånd alltid finns, helt oberoende av vilken sorts yta vi har.

De topologiska yttillstånden har flera ovanliga egenskaper. Som figur 6(c) illustrerar har två-dimensionella topologiska isola-



Figur 6: En topologisk isolator (gul) där det gröna valensbandet och röda ledningsbandet är inverterade (a) måste kopplas ihop med luften utanför, representerad som en normal isolator med icke-inverterade band (b). Detta ger upphov till tillstånd (röda och gröna streckade linjer) som korsar Fermienergin (streckad svart linje) på ytan av materialet. Resultatet är metalliska yttillstånd (orange) som korsar energigapet i den topologiska isolatorn (c).



Figur 7: Två- (a) och tre-dimensionella (b) topologiska isolatorer med ytorna av materialen i gult (vänster) och bandstrukturen för ytillstånden (höger) med valensband i rött och ledningsband i grönt och blå pilar för spinn.

torer (dvs. som endast utgörs av ett enda plan) ett ytillstånd med linjär positiv lutning och ett med negativ lutning. Då lutningen bestämmer hastigheten rör sig alltså elektronerna i de båda ytillstånden åt olika håll. Även om det inte framgår av den förenklade beskrivningen här, så har dessa två tillstånd också olika spinn. Det betyder att på kanten av materialet kan spinn-upp elektroner bara röra sig åt t.ex. vänster medan spinn-ner elektroner bara kan röra sig åt höger.

Denna uppdelning har fascinerande konsekvenser. Tänk dig att det finns en liten störning på en av kanterna, t.ex. en kantatom som fattas eller som kanske blivit utbytt mot ett annat grundämne. En elektron som susar fram längs kanten har bara två olika möjligheter. Den kan försöka gå runt störningen eller så tar det stopp och elektronen måste vända om. Om störningen inte förmår att ändra elektronens spinn (vilket bara kan ske om störningen är magnetisk) så kan inte elektronen vända om eftersom elektroner som rör sig åt motsatt håll har motsatt spinn. Detta ger upphov till helt förlustfria spinnströmmar längs kanten. Det är spinnströmmar eftersom det alltid finns en annan elektron med motsatt spinn som rör sig åt andra hållet, och de är förlustfria eftersom elektronerna aldrig kan förlora sin hastighet. Tillämpningar av dessa förlustfria kantspinnströmmar undersöks redan intensivt. Fram-

förallt ny elektronik som inte ger upphov till några värmeförluster är en av de stora förhoppningarna.

För tre-dimensionella topologiska isolatorer, som är vanligare, lever ytillståndet istället i två dimensioner och formar en kon i reciproka rummet med spinnets riktning låst till vågvektorns riktning. Denna sorts bandstruktur är vad man får för en fri elektron i vakuum från Diracekvationen och brukar därför kallas för ett Diracspektrum. Vi kan alltså på ytan av en tredimensionell topologisk isolator simulera och experimentera med fria relativistiska elektroner i vakuum. Det finns även här förhoppningar att dessa ska kunna användas inom framtida teknologi.

Jag antydde förut att många topologiska isolatorer är material som har funnits länge men att det är först nu, med hjälp av topologi, som vi på djupet har förstått deras egenskaper. Den första två-dimensionella topologiska isolatorn upptäcktes i strukturer uppbyggda av omväxlande lager av CdTe (kadmiumtellurid) och HgTe (kvicksilvertellurid), material kända sedan länge. Tyvärr hör varken kadmium eller kvicksilver till de mest miljövänliga grundämnena, men numer finns det flera andra lovande material. Bland de tre-dimensionella topologiska isolatorerna är vismut-legeringar vanliga. Här är speciellt Bi_2Te_3 (vismuttellurid) intressant att nämna. Detta material har varit känt sedan länge och finns till och med att köpa kommersiellt där det används framförallt i vinkylare. Nu vet vi också att det är en topologisk isolator med väldigt speciella ytillstånd. Kanske dyker dagens vinkylar-material upp i framtidens elektronik!

Topologiska supraledare

Efter att ha sett hur topologi ger upphov till en helt ny klass av isolatorer, låt oss direkt hoppa över till supraledare. Matematiskt sett är det faktiskt bara ett litet steg: den topologiska bandteorin för isolatorer kan även tillämpas på supraledare. Vid en första anblick kan detta påstående verka befängt. Hur kan en supraledare som leder ström helt utan motstånd ha någonting gemensamt med en isolator? För att förstå detta behöver vi en liten snabbkurs i supraledning.

Supraledning är ett av de ytterst få kvantmekaniska fenomen som existerar på en makroskopisk nivå. I en supraledare syns kvantfysiken i en enkel resistansmätning, och det enda som krävs

är att temperaturen är tillräckligt låg, nämligen under den kritiska temperatur där supraledning uppstår. Vid denna temperatur formar elektronerna i materialet par, så kallade *Cooper-par*. Alla par hamnar sedan i ett och samma kvanttillstånd, dvs. de bildar ett kvantkondensat. Lite löst sett kan kondensatet ses som ett hav av elektronpar där känsligheten för allt runt omkring försvinner. Därmed kan kondensatet leda ström helt utan motstånd och vi har en supraledare.

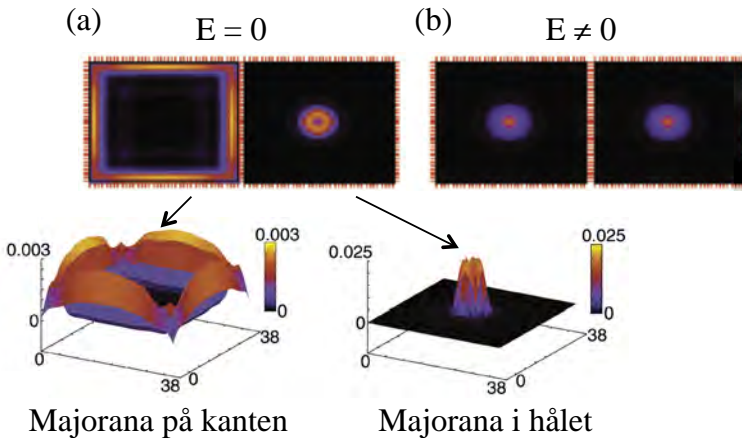
Det supraledande kondensatet skyddas av ett energigap. Gapets energi är lika stort som den energivinst som uppkom då kondensatet formades. Finns det dock en energi tillgänglig som är större än gapet kan en partikel exciteras ut ur kondensatet. Denna partikel kan vara elektron-lik, men sker en sådan excitation följer det också alltid en hål-lik excitation, som representerar avsaknaden av den elektron som den första elektronen skulle ha format ett par med. Allt som allt ger processen upphov till både en elektron- och en hålexcitation som bandstrukturmässigt ser precis ut som excitationprocessen i en isolator, se figur 3(d). Alltså har excitationerna ut ur det supraledande kondensatet samma bandstruktur som en isolator. Men det är ju bandstrukturen som är topologisk i en topologisk isolator och därmed kan hela vår topologiska bandteori också tillämpas på supraledare. Alltså är topologiska supraledare, supraledande inuti materialet, med ett energigap (kondensationsgapet), men de har metalliska tillstånd på ytan.

Majoranafermioner

Även om bandstrukturen är densamma för topologiska supraledare och isolatorer så finns det en fundamental skillnad mellan dem: egenskaperna hos de partiklar som fyller bandstrukturen är väldigt olika. I en supraledare är alla kvasipartiklar en blandning av elektroner och hål, som vi såg ovan. När kvasipartikelns energi är exakt noll får den precis lika mycket hål- som elektron-egenskaper. Eftersom hålet är materiefysikens motsvarighet till elektronens antipartikel betyder det att en kvasipartikel med noll energi i en supraledare är sin egen antipartikel! Nu är dock kvasipartiklar med noll energi ovanliga i supraledare på grund av energigapet, men i just topologiska supraledare så garanterar ju topologin att det finns kvasipartiklar med noll energi på ytan. Men nu undrar du kanske: Hur är detta egentligen möjligt, en elektron

har ju trots allt alltid laddning $-1e$ medan hålet har laddning $+1e$? Hur kan ett hål och en elektron blandas i en och samma kvasipartikel? Det är här kondensatet med alla andra elektronpar kommer in i bilden. Eftersom det finns ett makroskopiskt antal elektronpar så spelar det ingen roll om vi använder ett enstaka par: Ta ett hål med laddning $+1e$ och lägg till ett elektronpar med laddning $-2e$ och – voilà! – vi har en elektron med laddning $-1e$. Det är just denna flexibilitet skapad av kondensatet som gör att excitationerna i en supraledare har både elektron- och hålegenskaper. Detta är ett typexempel på ett kollektivt fenomen som aldrig kan ske med bara ett fåtal partiklar.

En partikel i ett elektronsystem som är sin egen antipartikel har ett eget namn: *Majoranafermion* efter Ettore Majorana. På 1930-talet funderade han på varför Diracekvationen innehåller ett imaginärt i . Han lyckades till slut konstruera en annan ekvation, fortfarande för elektron-lika partiklar (kallade fermioner), men som är reell och därmed enbart har reella lösningar. En reell partikel är alltid sin egen antipartikel, eftersom matematiskt skapas en antipartikel genom att ta komplex-konjugatet av partikelns vågfunktion. Lösningen till Majoranas ekvation, Majoranafermionen,



Figur 8: Vågfunktionens densitet (kvadraten av amplituden) för de två Majoranafermionerna vid noll energi (a) och ett liknade tillstånd men vid nollskild energi (b) i en topologisk supraledare med en vortexdefekt i mitten som fungerar som ett litet hål. I (a) har en elektron helt splittrats upp i två, med ena halvan vid hålet och den andra på kanten. I (b) bildar de två Majoranafermiondelarna en vanlig elektron eftersom energin här är nollskild.

är därmed en elektronlik partikel som är sin egen antipartikel. Alltså kan de kvasipartiklar som vi just fann på ytor av topologiska supraledare beskrivas som Majoranafermioner.

Ur allt detta följer också ett annat fascinerande faktum. För att skapa ett komplext tal c behövs två reella tal a och b : $c = a + ib$. Eftersom elektronen (lösningen till Diracekvationen) är komplex behövs det alltså två reella Majoranafermioner (lösningen till Majoranaekvationen) för att skapa en elektron. Eller omvänt: en Majoranafermion är en halv elektron! Nu är det dock inte så att vi har kluvit elektronen mitt itu på ytan av topologiska supraledare. För det går inte, så vitt vi vet. Vad som hänt är att det på ytan finns kvasipartiklar som beter sig helt och hållet som Majoranafermioner eller halva elektroner. Mångpartikelfysik *in action*, så att säga.

Ett exempel på denna uppdelning av elektronen visas i figur 8.¹ Det är en två-dimensionell topologisk supraledare där ett hål i dess mitt gör att supraledaren i detta fall även har en inre kant. Det finns två Majoranafermiontillstånd vid exakt noll energi och de består av en Majoranafermion vid hålets kant, medan den andra halvan av elektronen finns på systemets ytterkant. För alla andra tillstånd är de två Majoranafermionsdelarna i samma position i rummet och bildar därmed en vanlig elektron.

Jakten på Majoranafermionen

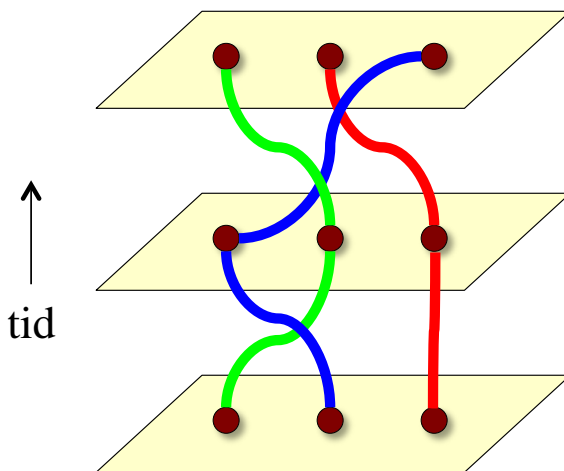
Än så länge har vi inte upptäckt någon fundamentalpartikel som är en Majoranafermion, men vi är förhoppningsvis på väg att upptäcka kvasipartiklar som är Majoranafermioner i nästan helt vanliga material. Teoretiskt är uppkomsten av Majoranafermioner redan väletablerad i topologiska supraledare, som vi fått en försmak av ovan. Vad som återstår är att experimentellt också visa det.

Det finns dock en liten detalj som vi hittills har sopat under mattan. Vi måste se till att Majoranafermionerna på ytan av topologiska supraledare inte uppträder i par, för två halva elektroner är ju bara en vanlig elektron, precis som i figur 8(b). Detta görs lättast med ett magnetfält som splittrar upp den degenerering (dvs. tillstånd med samma energi) som finns mellan spinn-upp och spinn-ned elektroner i vanliga fall. Återstår därmed bara att hitta material som är topologiska supraledare där

¹ Se vidare K. Björnson och A. M. Black-Schaffer, *Vortex states and Majorana fermions in spin-orbit coupled semiconductor-superconductor hybrid structures*, Phys. Rev. B **88**, 024501 (2013) (DOI: 10.1103/PhysRevB.88.024501).

ett magnetfält används för att isolera enskilda Majoranafermioner.

Otroligt nog behöver vi inte söka länge för att hitta lovande kandidater. För närvarande forskas det intensivt längs åtminstone två spår. Ett populärt förslag använder en nanotråd av halvledar-material med stark spinn-bankoppling, t.ex. InSb (indiumantimonid) eller InAs (indiumarsenid). Nanotråden placeras på ytan av en vanlig supraledare, t.ex. aluminium, vilket gör att också tråden blir supraledande. Till sist lägger vi på ett magnetfält. Detta ska teoretiskt sett, och med bra indikationer från experiment, ge upphov till en topologisk supraledare inuti tråden. Trådens ändrar blir då systemets ytor och det är här Majoranafermionerna förväntas uppkomma; en Majoranafermion vid varje ände av tråden. Ett annat enkelt tillvägagångssätt inkluderar samma tre ingredienser: spinn-bankoppling, supraledning, och magnetism. Här börjar man dock med bly som är supraledande vid låga temperaturer och som också har en stark spinn-bankoppling. Genom att lägga magnetiska järn-atomer på blyets yta så att de formar en kedja bildas en endimensionell topologisk supraledare där teorin säger att det ska finnas en Majoranafermion i varje kedjeände. I båda dessa system har man uppmätt att det finns tillstånd vid noll energi vid trådens respektive kedjans ändrar, men inte någon annanstans. Vad som återstår är att visa att dessa verkligen är Majoranafermioner.



Figur 9: Exempel på partikel-flätning i en kvantdator där tre Majoranafermioner (röda cirklar) två gånger byter plats med varandra.

Topologiska kvantdatorer

Att experimentellt visa att ett system har Majoranafermioner är tyvärr långt ifrån trivialt eftersom det är svårt att veta säkert när man bara mäter en halv elektron. Fast vi kan också vända på denna problematik och fråga oss vad Majoranafermioner är bra till. Just det icke-lokala i att dela upp en elektron i två åtskilda delar är inte bara fascinerande utan kan också användas till att konstruera en topologisk kvantdator.

Den icke-lokala egenskapen hos ett par Majoranafermioner gör nämligen att de uppför sig mycket speciellt när vi låter en Majoranafermion förflytta sig runt en annan, så att de byter plats med varandra. Hade det handlat om vanliga elektroner så hade den totala vågfunktionen i en sådan process högst kunnat ändra sin fas, men för Majoranafermioner ändrar sig vågfunktionen mycket mer. Detta gör att man kan använda processer där man, så att säga, ”flätar” Majoranafermioner runt varandra som operationer i en kvantdator. I en sådan kvantdator skulle resultatet endast bero på hur hela flätan av alla operationer såg ut i slutänden, inte exakt på hur flätan blev till. Detta gör att denna typ av kvantdator blir väldigt okänslig för störningar. I grund och botten är det den icke-triviala topologin som ger detta skydd. Denna robusthet mot störningar gör topologiska kvantdatorer väldigt lockande, och jakten på att hitta Majoranafermioner i material är därmed extra het.

Sammanfattning

Här får vår resa in i materialfysikens förtrollade kvantvärld ta slut. Vi har ändå nått ända fram till en topologisk kvantdator efter att ha börjat med den grundläggande förståelsen för metaller och isolatorer. Framtiden får utvisa om dagens transistorteknologi kommer att ersättas av topologiska kvantdatorer. Men i vilket fall så hoppas jag att denna text har visat hur allt hänger ihop. Kanske mest häpnadsväckande är hur till synes gammal fysik – jo, bandteorin har många år på nacken! – helt plötsligt har blivit högaktuell igen efter att den kombinerats med det matematiska begreppet topologi. Ibland tar sig forskning de mest besynnerliga vägar, men det är kanske just det som gör det så spännande. ❖

För vidare läsning

P. W. Anderson, *More is different*, *Science* **177**, 393 (1972).
(DOI: 10.1126/science.177.4047.393)

X. Qi and S.-C. Zhang, *Quantum spin Hall and topological insulators*,
Physics Today **63**, 1, 33 (2010). (DOI: 10.1063/1.3293411)

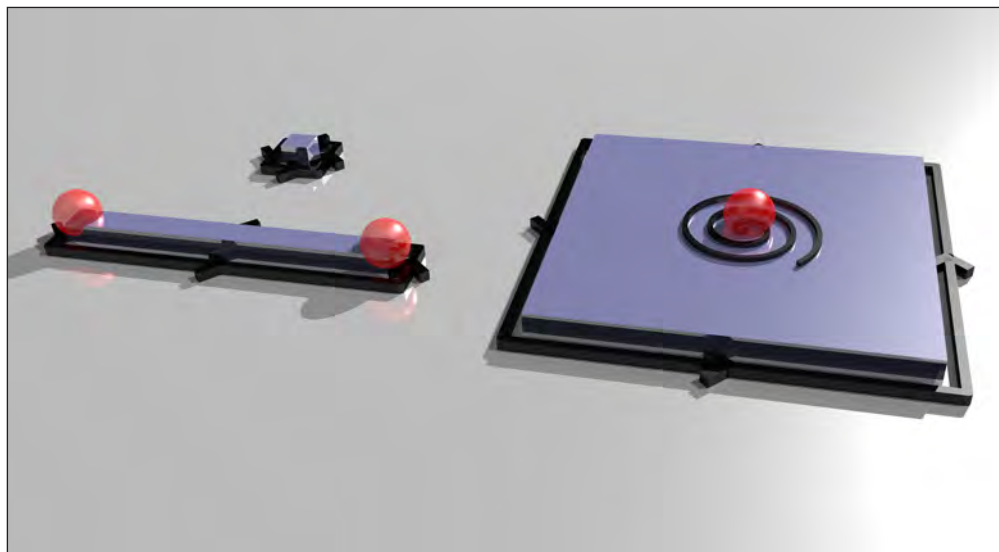
F. Wilczek, *Majorana returns*, *Nature Physics* **5**, 614 (2009).
(DOI: 10.1038/nphys1380)

J. Alicea, *Exponential boost for quantum information*,
Nature **531**, 177 (2016). (DOI: 10.1038/531177a)

D. Castelvecchi, *The strange topology that is reshaping physics*,
Nature **547**, 272 (2017). (DOI: 10.1038/547272a)

Tack till

Kristofer Björnson för värdefull korrekturläsning och medgivandet att använda flera bilder från hans avhandling.



Vinjettbilden: Ferromagnetiska atomer (blåa) på en supraledare (grå) kan ge upphov till Majoranafermioner (röda bollar) vid ändarna av en tråd av atomer, eller i en vortexdefekt (svart spiral) i en stor ferromagnetisk ö.

