

Gunnar Björk

är professor i Fotonik med Mikrovågsteknik vid KTH. Hans forskning har dock under åren nästan uteslutande rört olika aspekter av kvantmekanik, kvantoptik och kvantinformation. Detta började med att han som doktorand (i fiberoptik) ställde sig frågan hur mycket information per enhetsbandbredd en foton kan överföra.

Kvantfysiken uppvisar många ointuitiva drag: icke-lokalitet och frånvaron av determinism brukar ofta framhållas som exempel. Mindre omtalat – men knappast mindre märkvärdigt – är något som kallas kontextualitet: storheter kan inte tillskrivas värden innan de faktiskt har mätts, eftersom sammanhanget (av andra mätningar) visar sig avgörande. Gunnar Björk förklarar närmare och ger exempel på fenomenet.

Vad är min längd om ingen mäter den?

Kontext, eller sammanhang, är viktigt i många situationer, inte minst när vi kommunicerar med varandra. En kommentar som i ett sammanhang kan tolkas som ironisk och rolig kan i en annan kontext vara nedsättande och opassande. Ett annat exempel på hur kontexten spelar roll ges i bilden till vänster: många upplever de två tomma cirklarna som olika stora eftersom de har olika omgivning. I denna artikel ska vi visa att kontext, i form av tidigare eller samtidigt mätningar, även är viktigt för kvantmekaniska system.

I det dagliga livet tillskriver vi system specifika och deterministiska egenskaper. Jag är till exempel enligt mitt pass 191 cm lång. Passet säger inte hur mycket jag väger, men skulle jag väga mig så ändrar det inte min längd. Kvantmekaniska system däremot, kan man i allmänhet inte tillskriva några bestämda egenskaper, ibland inte ens i statistisk mening. Att exempelvis specificera både ett systems exakta läge och dess exakta rörelsemängd i en viss koordinatriktning är inte möjligt; osäkerhetsrelationen¹ omöjliggör detta. Matematiskt beror detta på att de observabler (dvs. operatorer) som svarar mot mätning av läge och av rörelsemängd inte *kommuterar*: produkten av en operator A till vänster och en annan B till höger är inte lika med produkten av B till vänster och A till höger, $AB \neq BA$. Observablerna sägs då vara inkompatibla, och man har visat att detta innebär att system inte kan skapas där de två egenskaper observablerna mäter, t.ex. läge och rörelsemängd, samtidigt är väldefinierade.

Dessutom påverkas ett system av de mätningar man gör på det. Anta att man skapar ett partikeltillstånd där såväl läge som rörelsemängd har viss osäkerhet, men bara precis så mycket att

¹ Det finns många osäkerhetsrelationer som alla förbjuder att man har perfekt kunskap om två olika egenskaper hos ett och samma system. För enkelhetens skull går vi dock inte in på detaljer om dessa osäkerhetsrelationer här.

osäkerhetsrelationen uppfylls. Om man då gör en mätning av partikelns läge som minskar lägesosäkerheten, så kommer partikeln efter mätningen ha ökat osäkerheten i rörelsemängd. Detta är en välkänd konsekvens om de mätningar man gör är icke-kompatibla, dvs. om de operatörer som beskriver mätningarna inte kommuterar. Vad som är mindre känt är att även om mätningarna kommuterar så påverkar mätningarna varandra. Detta kallas kvantkontextualitet.

Kvantkontextualitet är ännu ganska okänt hos de bredare lagren av fysiker trots att effekten varit känd åtminstone sedan slutet av 1960-talet, och kanske ända sedan 1930-talet. Med den numera bortgångna fysikern Asher Peres ord kan kvantkontextualitet uttryckas som att kvantmekaniken inte medger följande två utsagor samtidigt:

- 1) Mätresultatet av en observabel A beror bara på valet av A och på systemets tillstånd.
- 2) Om observablerna A och B kommuterar, dvs. om $AB = BA$, så är mätresultatet av deras produkt AB detsamma som produkten av mätresultaten för A och B var för sig.

Vad Peres säger här är att resultatet av en mätning beror på i vilken kontext mätningen görs: mätresultatet beror på vilka andra mätningar som utförs, även om de observabler mätningarna motsvarar kommuterar. Detta förefaller att strida mot logiken, för om A och B kommuterar så tolkas det normalt sett som att det inte spelar någon roll i vilken ordning mätningarna A och B görs. Spelar nu ordningen ingen roll borde produkten av mätresultaten vara produkten av mätresultaten för A och B var för sig.

Kontextualiteten medför att kvantmekanikens slumpmässighet vid en mätning av en observabel (t.ex. en längd) inte kan förklaras genom att postulera en modell där slumpmässigheten uppstår genom att tillskriva kvantsystemet klassiskt statistiska egenskaper. Man skulle ju kunna tänka sig att längden på vart och ett av ett antal kvantsystem är välbestämd, men om vi mäter på ett antal till synes likadant preparerade kvantsystem så får man ändå en varians av den uppmätta längden genom att de olika mätta kvantsystemen är lite olika långa. Vi ska dock genom ett sinnrikt resonemang visa att denna förklaringsmodell, som kan hänföras till kategorin "dolda variabler", inte kan ge upphov till de mätresultat kvantmekaniken leder till. Dessa mätresultat har verifierats

experimentellt, så vi har (ännu) inga skäl att ifrågasätta kvantmekanikens riktighet. Istället får vi nöja oss med att konstatera att t.ex. en längd ”skapas”, eller ”fixeras”, först då den mäts. Innan mätningen har det mätta systemet inte någon väldefinierad längd, och detta beror inte på någon statistisk blandning av system med olika längd. Dessutom, enligt Peres resonemang, så kommer resultatet av mätningen bero på systemets historia, och specifikt på vilka observablers värden vi känner genom tidigare mätningar. Mätningar är alltså generellt sett kontextuella. Låt oss därför titta på vårt första exempel på kvantkontextualitet.

Kontextualitet i Mermin-Peres magiska kvadrat

För att påvisa kvantkontextualitet kan man använda Mermin-Peres magiska kvadrat. Den består av $3 \times 3 = 9$ olika mätningar. Mätningarna görs alla på ett par av tvånivåsystem, låt oss säga två spinn $\frac{1}{2}$ partiklar. I kvadratens vita rutor i figur 1 står de associerade mätoperatorerna, och hur en sådan mätning kan utföras är schematiskt illustrerad till höger om kvadraten. Dessa mätningar

Paulimatriser och tensorprodukt

Paulioperatorerna kan representeras av 2×2 matriser. Dessa är både unitära och Hermitska. Om man använder \mathbf{Z} -operatorns egenvektorer som bas är de

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Genom vanlig matrismultiplikation kan man t.ex. verifiera att $\mathbf{XX} = \mathbf{YY} = \mathbf{ZZ} = \mathbf{1}$, dvs. enhetsmatrisen.

Man kan också se att

$$\mathbf{XY} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\mathbf{Z}$$

och på samma sätt visar man att $\mathbf{YX} = -i\mathbf{Z}$. Således är $\mathbf{XY} = -\mathbf{YX}$. Cyklisk permutation av operatorerna \mathbf{X} , \mathbf{Y} och \mathbf{Z} ger övriga kommuteringsrelationer. \mathbf{X} , \mathbf{Y} och \mathbf{Z} har alla egenvärdena 1 och -1 .

Definitionen av tensorprodukten mellan två 2×2 matriser är

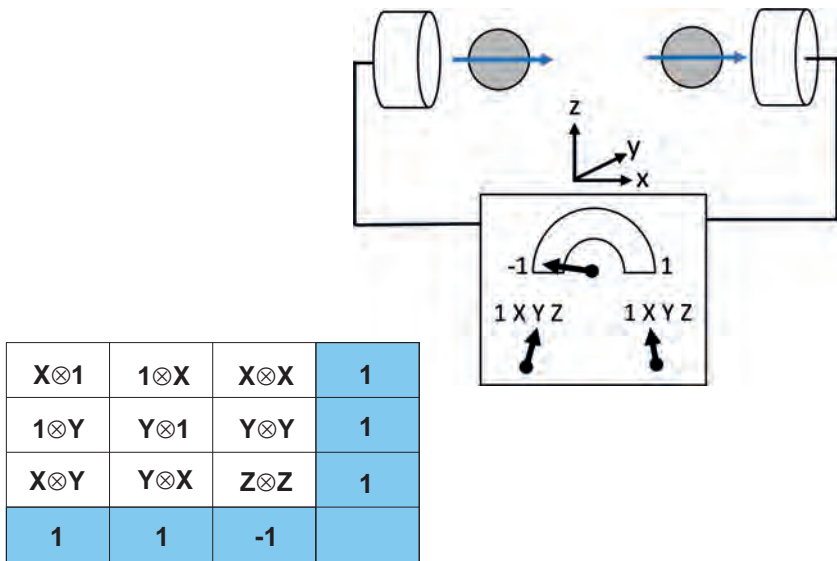
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

på paret av partiklar beskrivs matematiskt av så kallade tensorprodukter av Paulioperatorerna X, Y, Z . Exempelvis betyder $X \otimes Y$ att en X -mätning utförs på den ena partikeln och en Y -mätning utförs på den andra. Det enda vi egentligen behöver veta om Paulioperatorerna för att se kontextualiteten framträda är deras kommuteringsrelationer och egenvärden (se sidorutan om Paulimatri-ser och tensorprodukt).

Enhetsoperatoren I motsvarar att ingen mätning utförs på den motsvarande partikeln. Denna operator kommuterar därför med alla andra operatörer och har egenvärdet ett. Mäter vi X på en av partiklarna (alltså spinnets i x -riktningen hos spinn $1/2$ partikeln) så får vi antingen resultatet 1 eller -1 (i enheter av $\hbar/2$). Detsamma gäller för ett godtyckligt val av mätriktningen, och därmed måste X, Y och Z alla ha egenvärdena ± 1 . Eftersom resultatet av mätningarna i den magiska kvadraten motsvarar produkten av systemens mätvärden, så måste resultatet av en sådan mätning också bli antingen 1 eller -1 . Notera att en sådan ”produktmätning” skiljer sig från en mätning av varje system för sig. I det senare fallet finns det fyra möjliga utfall: ± 1 för ena systemet kombinerat med ± 1 för det andra. Om produkten av exempelvis utfallen av en Y -mätning på ena partikeln och en X -mätning på den andra skulle ge resultatet -1 , så skulle vi kunna avgöra om detta berodde på att utfallet blev -1 och 1 eller om det blev 1 och -1 för respektive partikel. De mätningar som beskrivs av tensorprodukterna av Paulioperatorerna har däremot bara två utfall med tillhörande egenvärden. Av dessa utfall kan man inte sluta sig till vilket värde på spinnets de enskilda partiklarna har efter att mätningen är gjord.

Gör man två på varandra följande mätningar där båda mätningarna beskrivs av en tensorprodukt så multipliceras operatorerna på var sida av tensorprodukttecknet \otimes med varandra, och i samma ordning. Således blir t.ex. resultatet av mätningen $X \otimes Y$ följd av $Y \otimes Z$ detsamma som för operatoren $YX \otimes ZY$. Notera att i endera fallet, och oavsett mätresultaten, så kan man inte veta vilket värde på spinnets de enskilda partiklarna har.

Vi kan nu använda reglerna i sidorutan ”Paulimatri-ser och tensorprodukt” för att konstatera att de tre mätningarna i varje rad och i varje kolumn, i den magiska kvadraten i figur 1, kommuterar. Man får t.ex. $(X \otimes I)(I \otimes X) = X \otimes X = (I \otimes X)(X \otimes I)$, eller $(Y \otimes X)(Z \otimes Z) = YZ \otimes XZ = -ZY \otimes (-ZX) = (Z \otimes Z)(Y \otimes X)$. Därefter kan vi räkna ut produkten av de tre operatorerna i varje rad och varje



Figur 1: Mermin-Peres magiska kvadrat till vänster och motsvarande schematiska uppställning för mätning av partiklarnas spinn (representerade av grå partiklar med blå spinnpilar) till höger. Just nu är mätaren inställd på att mäta $Y \otimes X$ (dvs. produkten av spinnets i y -riktningen på den vänstra partikeln och spinnets i x -riktningen på den högra partikeln) och utfallet blev -1 . Det kunde lika gärna blivit 1 eftersom vi mätte spinnets i riktningen y på den vänstra partikeln som hade preparerats med spinnets i positiv x -led. Mäter man spinnets i en ortogonal riktning till hur spinnets preparerats får man ett helt slumpmässigt utfall. Hade man däremot mätt $X \otimes X$ hade resultatet med säkerhet blivit $1 \times 1 = 1$ eftersom båda spinnen (de blå vektorerna) är preparerade i positiv x -led. Notera dock att eftersom mätaren bara visar produkten av spinnen så kan vi av resultatet 1 inte veta om spinnen efter mätningen båda är positiva eller båda är negativa i de mätta riktningarna. I själva verket är de enskilda spinnen fortfarande obestämda, mätningen har bara fastställt värdet på deras produkt.

kolumn. Vi får för den vänstraste kolumnen $(X \otimes 1)$ $(1 \otimes Y)$ $(X \otimes Y)$ = $(X \otimes Y)$ $(X \otimes Y)$ = $XX \otimes YY = 1 \otimes 1 = 1$. Den högraste av dessa likheter motiveras av att enhetsoperatoren inte gör någonting med andra operatörer eller system och därför kan ersättas med siffran ett i räkningar. Tar vi istället den högraste operatorkolumnen får vi $(X \otimes X)$ $(Y \otimes Y)$ $(Z \otimes Z) = XYZ \otimes XYZ = i ZZ \otimes i ZZ = -(1 \otimes 1) = -1$ (där vi använt resultatet från sidorutan att $XY=iZ$). Resultaten av alla rad- och kolumnprodukter står angivna i högraste kolumnen, respektive i understa raden (de grå rutorna). Detta är de resultat vi får om resultaten av de tre parmätningarna i en rad eller i

en kolumn multipliceras. Vi ser att produkten av de tre succesiva mätresultaten i varje rad och varje kolumn är deterministiskt, och är 1 i fem fall och -1 i ett fall. Detta oavsett vilket initialtillstånd våra två spinn befinner sig i!

Vi vet dock från början att var och en av de nio mätningarna i kvadraten antingen ger resultatet 1 eller -1 . Således måste produkten av utfallen för på varandra följande mätningar av två spinn också bli antingen 1 eller -1 . Det är dock inte uppenbart (annat genom räkningar eller mätningar) att man för varje systempreparation alltid får samma rad- eller kolumnprodukt vid mätningar. Preparerar vi systemet i tillståndet där båda partiklarna har spinn riktat i positiv z -led, och mäter spinnets i x -led hos den högra partikeln (dvs. mäter operatoren $\mathbf{1} \otimes \mathbf{X}$ i mittenkolumnen) blir mätresultatet helt slumpmässigt antingen 1 eller -1 . Om mätningen råkade ge resultatet 1 så säger von Neumanns projektionspostulat att *efter* mätningen är *de facto* spinnets hos den högra partikeln positivt i x -led. Mäter vi nu $\mathbf{Y} \otimes \mathbf{1}$ så blir återigen resultatet helt slumpmässigt, kanske -1 . Efter denna andra mätning är dock systemet i tillståndet spinn -1 i y -led till vänster och spinn $+1$ i x -led till höger. Den sista mätningen i mittenkolumnen $\mathbf{Y} \otimes \mathbf{X}$ ger då ett helt deterministiskt resultat, nämligen -1 eftersom systemet vid denna mätning är i ett egentillstånd till mätoperatoren. Produkten av de tre mätutfallen blir således $1 \times (-1) \times (-1) = 1$, precis som den magiska kvadraten utsäger. Alla andra möjliga utfall av de tre mätningarna ger samma produkt.

Det ointuitiva eller oväntade med kvadraten är att om vi nu, som i det klassiska fallet, för varje val av enskilt system skulle tillskriva varje mätutfall ett värde *a priori*, så indikerar kvadraten att i varje *rad* måste ett jämnt antal mätningar ge utfallet -1 för att produkten ska kunna bli 1. Totalt sett måste alltså ett jämnt antal av de totalt nio mätningarna ge resultatet -1 . Tittar vi nu på *kolumnerna* måste antalet minusresultat i de två vänstraste kolumnerna också vara jämnt, medan det i den högraste kolumnen måste vara udda. Totalt sett måste då antalet mätningar i kvadraten som ger resultatet -1 vara udda. Här får vi en motsägelse. Vi kan inte tillskriva systemet både ett jämnt och ett udda antal minusresultat.

Kvadraten i figur 2 ger ett möjligt utfall för åtta av mätningarna ifall systemet initialt prepareras som två positiva spinn i z -led. Utfallet av den nionde mätningen (där det står ett frågetecken) går dock inte att fylla i. Resultatet är kontextuellt. Skulle mätserien all-

deles innan denna sista mätning varit $X \otimes 1$ och $1 \otimes X$ är vi säkra på att mätningen av $X \otimes X$ i detta fall skulle ha gett resultatet 1. Hade man istället just mätt $Y \otimes Y$ och $Z \otimes Z$ så skulle resultatet ha blivit -1 . Trots att de tre mätningarna i varje kolumn kommuterar och detsamma gäller raderna så kan man inte tillskriva systemet några egenskaper *a priori*.

1	1	?
-1	-1	1
-1	-1	1

Figur 2: Möjliga tänkta mätutfall om systemet från början hade haft positivt spinn i z -led för båda partiklarna och varje system skulle ha mätts antingen med observablerna i en kolumn eller i en rad. Kom ihåg att det bara är observablerna i varje rad respektive varje kolumn som kommuterar. Därför har en matris som denna bara en mening om man tror att systemet har förutbestämda, men för oss kanske okända, värden på observablerna.

Kan kvantmekanikens icke-determinism förklara den synbara kontextualiteten?

Man kan då tro att situationen ska kunna räddas genom det faktum att beroende på hur vi preparerar våra spinn kan vi få oförutsägbara resultat, dvs. genom att vi inte *a priori* kan veta vilket resultat vi ska föra in i en sådan ruta i kvadraten. Motsägelsen kvarstår dock, för vi kan dela upp kvadraten i figur 2 i de olika fallen. Säg till exempel att vi preparerar systemet så att båda partiklarna har positivt spinn i z -led. Då kan vi inte på förhand veta vilket resultat vi får för mätningen $1 \otimes X$, men vi kan behandla de två möjliga utfallen vart och ett för sig. Och i den mån vi sedan får andra mätningar som är oförutsägbara, kan vi dela upp på ytterligare möjliga utfall. Prova gärna själv! För varje potentiellt utfall kvarstår motsättningen.

Tror vi på kvantmekaniken får vi därför acceptera Peres utsaga att de båda påståendena 1) och 2) ovan (sid 84) är oförenliga. Detta leder dock inte till någon kvantmekanisk paradox, för om vi accepterar kvantmekaniken som förklaringsmodell, utan att lägga på ytterligare restriktioner som att systems egenskaper ska vara

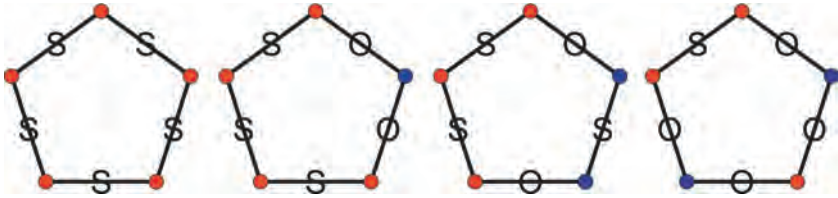
förutbestämda, så följer experiment och teori varandra utomordentligt väl. Tar vi två spinn $\frac{1}{2}$ -partiklar och mäter först $X \otimes I$ med t.ex. resultat $+1$ och sedan $I \otimes X$ med t.ex. resultat -1 så kommer vi genom dessa mätningar ha försatt systemet i ett tillstånd som garanterar att resultatet av mätoperatören $X \otimes X$ blir -1 . Produkten av de tre mätningarnas utfall blir därför 1. Mäter vi istället $Z \otimes Z$ med utfall $+1$ följt av $Y \otimes Y$ med utfall -1 så kommer systemet genom dessa mätningar att ha försatts i ett (annat) tillstånd som garanterar att utfallet av $X \otimes X$ blir 1. Som vi ser finns ingen paradox i detta, för den sista mätningen görs på två (genom de tidigare mätningarna) olika preparerade system. En paradox uppstår bara om vi tror att eftersom de tre mätningarna i varje rad kommuterar och detsamma gäller varje kolumn, så ”borde” mätvärdet av $X \otimes X$ vara ”opåverkat” av de övriga mätningarna i raden, respektive kolumnen, och därför ”borde” ge samma värde oavsett om vi mäter en rad eller en kolumn. Kvantmekaniken visar att detta inte är fallet för detta val av mätningar.

Resultatet av en mätning kan alltså bero på kontexten, dvs. vilka mätningar som gjorts innan, och detta oavsett om mätningarna är kompatibla (observablerna kommuterar) eller inte. Vår klassiska intuition och vår eventuella önskan att systems mätbara värden ”finns” redan innan mätningen är gjord är därmed krossad.

Hur många olika mätningar behövs för att påvisa kontextualitet?

På senare tid har det visats att man inte behöver nio olika mätningar för att påvisa kontextualitet – det räcker med fem. (Den första konstruktionen som påvisade en logisk motsägelse av detta slag använde 117 olika mätningar!) Fem är dock det minsta möjliga antalet. Låt oss därför visa ett ”minimalt” exempel på kontextualitet.

Antag att man färgar varje hörn i en pentagon antingen blått eller rött. Om två närliggande hörn har samma färg markerar vi kanten mellan dem med ett S för ”samma”, och om de har olika färg markerar vi kanten med ett O, för ”olika”. Man kan ganska snabbt förvissa sig om att antalet kanter markerade med ett O för en given pentagonfärgning antingen är 0, 2, eller 4. Aldrig 1,3, eller 5. I figur 3 visar vi exempel på färgningar som leder till olika, jämna värden på antal O:n.



Figur 3: Pentagoner med antingen röda eller blåa hörn. För en fixt orienterad pentagon finns $2^5 = 32$ möjliga färgningar. De tre högra pentagonerna kan alla vridas $1/5$ -dels varv i taget och ger då upphov till totalt $3 \times 5 = 15$ olika färgningar. Tillsammans med den vänstra pentagonen har vi då 16 olika varianter. Byter man rött till blått och vice versa så kan man på motsvarande sätt generera övriga 16 färgningar. Alla har antingen 0, 2, eller 4 olikfärgade närliggande hörn.

Anta nu att vi väljer att titta på bara en slumpmässigt utvald kant i taget. Vi ser då antingen en S- eller en O-markering. Gör vi om försöket många gånger kommer vi i fallet med en enfärgad pentagon att få noll utfall med O. I en pentagon med två sidor markerade med O kommer vi att i ungefär $2/5$ av fallen se ett O och från detta kan vi sluta oss till att pentagonen har $5 \times 2/5 = 2$ sidor med olikfärgade hörn. På samma sätt är sannolikheten $4/5$ att se ett O för en pentagon färgad som den högra i figur 3.

Om vi nu tar och blandar olika typer av färgade pentagoner och gör om experimentet så måste medeltalet av antalet O-sidor att vara mellan 0 och 4. De två extremerna får man om alla pentagoner t.ex. är färgade som längst till vänster, respektive längst till höger i bilden. När vi blandar olika pentagoner kan man dock inte förutspå en enskild mätnings utfall annat än statistiskt. Utfallet baseras dock på en modell där varje enskild pentagon har ett välbestämt antal sidor markerade med S respektive O.

Ett kvantmekaniskt "pentagonexperiment"

Nu ska vi beskriva ett kvantmekaniskt experiment som speglar pentagonexperimentet. Pentagonen representeras i detta fall av ett kvantmekaniskt system i ett specifikt tillstånd. Anta att vi numererar pentagonens "hörn" med $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Vi väljer sedan slumpmässigt ett hörn k och tittar på vilken "färg" detta hörn har genom att göra en av fem projicerande mätningar på systemet (se sidorutan "Projektiva mätningar"). Om vår mätning av hörn k ger

ett positivt utslag indikerar detta att hörnet är rött, medan ett negativt utslag indikerar blått. Vi mäter sedan ett närliggande hörn, $k + 1$ eller $k - 1$ (där hörn $5 + 1$ tolkas cykliskt, dvs. som hörn 1, och hörn $1 - 1$ tolkas som hörn 5). Vi mäter detta hörns ”färg” på samma sätt. Vi kan då avgöra om kanten ska markeras S eller O. Sedan gör vi om mätningarna med ett nytt ”pentagonssystem”. Man kan visa (se sidorutan ”Så implementeras pentagonexperimentet kvantmekaniskt”) att närliggande hörns mätprojektorer kommuterar, så huruvida vi först mäter hörn k och sedan mäter hörn $k \pm 1$ eller vänder på mätordningen spelar ingen roll.

Gör vi om experimentet många gånger och provar med att mäta på olika närliggande hörn kommer vi att finna att vi aldrig får resultatet rött-rött, att sannolikheten för att få rött-blått eller blått-rött är lika stora, nämligen $1/\sqrt{5}$ vardera, och således att sannolikheten för att få blått-blått är $1 - 2/\sqrt{5}$ (se sidorutan). Detta oavsett vilka två närliggande hörn vi väljer att mäta. För att vara säker på att Naturen inte konspirerar emot oss bör vi välja hörn slumpmässigt från pentagon till pentagon, för annars skulle i princip någon för oss okänd mekanism ”servera oss pentagoner” vridna så att något visst resultat gynnas eller missgynnas.

I snitt måste alltså de pentagoner vi mätt på ha $5 \times 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Projektiva mätningar

Det förmodligen mest kända exemplet på en projicerande mätning är det klassiska Stern-Gerlachexperimentet. Silveratomer med spinn $\frac{1}{2}$ skickas i en stråle mot ett vertikalt riktat, inhomogent magnetfält. Silveratomerna kommer då att böjas av antingen uppåt eller nedåt. De som böjs av uppåt kommer att ha spinn $+1/2$, och de som böjs av nedåt har spinn $-1/2$ i vertikalriktningen om magnetfältet är korrekt inställt. Skickar man en silveratom med spinn $+1/2$ i vertikalled genom magnetfältet är man säker på att den avböjs uppåt och att mätningen lämnar spinnriktningen oförändrad.

Om silveratomstrålen består av atomer med slumpvis orienterat spinn kommer en avböjning uppåt att ”kollapsa”

spinn till att spinna i positiv vertikalled, oavsett vilket spinn det var innan mätningen. Skickar man exempelvis en atom med spinn riktat i horisontalriktningen kommer man inte att kunna förutsäga om den kommer att avböjas uppåt eller nedåt – utfallen har lika sannolikhet – men skulle den avböjas uppåt så kommer den efter mätningen att ha spinn orienterat i positiv vertikalled.

En Stern-Gerlachmätning av detta slag har den trevliga egenskapen att den inte ”förstör” systemet den mätt på genom t.ex. absorption, vilket är fallet med många andra typer av mätningar. En foton-detektor, till exempel, absorberar ju den mätta fotonen och överför dess energi till en fotoelektron.

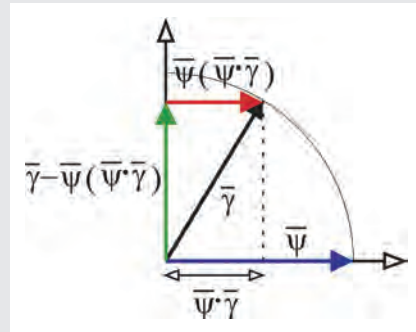
$\approx 4,47$ sidor märkta O. Detta medelvärde är större än det största värdet (nämligen 4) man kan få om man antar att hörnen på varje pentagon har för oss kanske okända (genom en blandning av olika pentagoner) men ändå förutbestämda färger. Experimentet visar alltså att en kvantmekanisk mätning kan tolkas som att den ”ger” det mätta systemets värde genom mätningen – värdet var inte bara

Diracnotationsräkning

Paul Dirac införde en elegant och användbar notation för kvantmekaniska beräkningar som har stora likheter med vanlig Euklidisk vektorräkning och matrisräkning. Ett centralt begrepp i denna notation är tillståndsvektorn $|\psi\rangle$. Denna innehåller all tillgänglig information om systemet. Till skillnad från en Euklidisk vektor finns två varianter av tillståndsvektorn, $\langle\psi|$ som kallas en *bra*, och $|\psi\rangle$ som kallas en *ket*. Vektorerna innehåller identisk information. Precis som med vanliga vektorer kan man räkna ut projektionen av en vektor på en annan med skalärmultiplikation. Till skillnad från Euklidiska vektorers skalärprodukt kan (och är oftast) skalärprodukten mellan en bra och en ket ett komplext tal. En konsekvens är att $\langle\psi|\gamma\rangle = \langle\gamma|\psi\rangle^*$ där asterisken betecknar komplexkonjugatet. (Genom vårt val av tillstånd blir dock de skalärprodukter som används i denna artikel reella, varvid ordningen i skalärprodukten inte spelar någon roll.) Vanligtvis räknar man med normerade vektorer, och likt Euklidiska enhetsvektorer är ”egenskalärprodukten” för dessa lika med ett, $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\gamma|\gamma\rangle = 1$.

En projicerande mätning kan man matematiskt beskriva med den yttre produkten av en ket och en bra, $|\psi\rangle\langle\psi|$. Gör man denna mätning på ett tillstånd $|\gamma\rangle$ är sannolikheten att mätetektorn ”klickar”, dvs. att vi får ett positivt utfall, lika med $|\langle\psi|\gamma\rangle|^2$ där $0 \leq |\langle\psi|\gamma\rangle|^2 \leq 1$. Får man ett positivt utfall säger von Neumanns projektionspostulat att man genom mätning-

en försatt det mätta systemet i tillståndet $|\psi\rangle$. Får man inte ett positivt utfall vet man att systemets tillståndsvektor inte längre har någon projektion på $|\psi\rangle$, så man kan – i likhet med hur det fungerar för Euklidiska vektorer – dra ifrån denna komponent från vektorn $|\gamma\rangle$, se figur 4. Resultatet efter mätningen är systemvektorn $|\gamma\rangle - |\psi\rangle\langle\psi|\gamma\rangle$. Denna vektor är dock kortare än en enhetsvektor, som framgår av figuren. Dess längd i kvadrat ger sannolikheten $1 - |\langle\psi|\gamma\rangle|^2$ för detta utfall.



Figur 4: De blå och svarta vektorerna är enhetsvektorer, där den svarta är systemets tillståndsvektor och den blå är mätprojektionsvektorn. Längden av den svarta γ -vektorns projektion på den blå ψ -vektorn är angiven nederst. Projektionsvektorn är röd. Den gröna vektorn är γ -vektorn minus projektionsvektorn. Notera att den gröna vektorn är kortare än enhetsvektorerna och att den är ortogonal mot ψ -vektorn, dvs. den har ingen projektion på mätprojektionsvektorn. Den gröna vektorn representerar enligt von Neumann systemet om projektionsmätningen ger ett negativt utfall.

Så implementeras pentagonexperimentet kvantmekaniskt

I pentagonexperimentet behöver man ett system som har tre möjliga (ortogonala) tillstånd. Ett exempel på ett sådant system är en spinn 1-partikel. Mäter man spinnet i en godtycklig riktning får man resultatet +1, 0, eller -1 (i enheter av \hbar). Man kan då som i Stern-Gerlachfallet i princip bygga en projicerande mätare som om spinnet är 1 får partikeln att böja av uppåt, och annars, om spinnet är 0 eller -1 får partikeln att böja av nedåt. I det första fallet vet man att partikeln spinner i positiv vertikalled efter mätningen, medan man i det andra fallet, om partikeln böjs av nedåt, endast vet att spinnet inte är riktat i positiv vertikalled.

Man kan skriva dessa tillstånd i Diracnotation som $|+1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$. Dessa tillstånd är ortogonala. Detta betyder att om någon ges en partikel i något av dessa tre tillstånd (utan att veta vilket) kan personen i princip med säkerhet ta reda på vilket av dem som partikeln preparerats i. Matematiskt betyder ortogonalitet att den inre produkten mellan tillstånden är noll, t.ex. är $\langle +1|0\rangle = 0$ och likaså är $\langle +1|-1\rangle = 0$. För alla sex olika kombinationer av tillstånd där de två tillstånden i vektorprodukten är olika är den inre produkten noll, medan den inre produkten av ett tillstånd med sig själv är ett, t.ex. $\langle 0|0\rangle = 1$.

Pentagontillståndet väljs till $|+1\rangle$, dvs. till skillnad från det klassiska fallet är alla pentagoner identiska. Vilket hörn vi väljer att mäta på bestäms av siffran k som vi kan välja godtyckligt mellan 1 och 5. Vi definierar sedan fem olika mätartillstånd, ett för varje val av hörn:

$$|m_k\rangle = |+1\rangle \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}} + \left(|0\rangle \cos \frac{4\pi k}{5} + |-1\rangle \sin \frac{4\pi k}{5} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Man kan visa att tillstånden $|m_k\rangle$ och $|m_{k+1}\rangle$ samt $|m_k\rangle$ och $|m_{k-1}\rangle$ är ortogonala: $\langle m_k|m_{k+1}\rangle = \langle m_k|m_{k-1}\rangle = 0$ för alla $k = 1, 2, \dots, 5$. Vi skapar sedan fem projektionsmätningsoperatorer (som avgör färgen för de respektive pentagonhörnen) som den yttre produkten av dessa tillstånd $|m_k\rangle\langle m_k|$, $k = 1, 2, \dots, 5$. Närbelägna hörns mätoperatorer kommuterar eftersom

$$|m_k\rangle\langle m_k| \cdot |m_{k+1}\rangle\langle m_{k+1}| = |m_k\rangle 0 \langle m_{k+1}| = 0$$

och

$$|m_{k+1}\rangle\langle m_{k+1}| \cdot |m_k\rangle\langle m_k| = |m_{k+1}\rangle 0 \langle m_k| = 0.$$

Således är

$$|m_k\rangle\langle m_k| \cdot |m_{k+1}\rangle\langle m_{k+1}| = |m_{k+1}\rangle\langle m_{k+1}| \cdot |m_k\rangle\langle m_k|$$

för alla fem värden på hörnen k , dvs. mätningarna kommuterar.

Om en mätning av $|m_k\rangle\langle m_k|$ ger ett positivt resultat så indikerar detta att hörn k är rött, annars blått. Sannolikheten för att få resultatet rött från en mätning av pentagontillståndets hörn k ges av $|\langle +1|m_k\rangle|^2$. Denna sannolikhet blir $1/\sqrt{5}$ (vilket följer från uttrycket för $|m_k\rangle$ ovan, samt ortogonalitetsrelationerna mellan $|+1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$), och den mätta pentagonens tillstånd kollapsar därvid till $|m_k\rangle$ (på samma sätt som en silveratom avböjd uppåt i

Stern-Gerlachexperimentet i sidorutan om projektiva mätningar ovan kollapsar till tillståndet $+1/2$). Mäter vi sedan på ett närliggande hörn blir därför sannolikheten att få ett positivt resultat $|\langle m_k | m_{k\pm 1} \rangle|^2 = 0$. Av detta kan vi sluta oss till att sannolikheten för att mäta två intilliggande hörn som röda är noll, och eftersom den enda andra möjligheten är att hörn $k \pm 1$ är blått, blir sannolikheten för rött-blått $1/\sqrt{5}$.

Sannolikheten för att hörn k inte är rött är $1 - 1/\sqrt{5}$. Pentagontillståndet efter mätningen (i det fall den ger negativt resultat) blir $|b\rangle = | +1\rangle - |m_k\rangle \langle m_k | +1\rangle$ (analogt med vektorerna i figur 4). Detta tillstånd är inte normerat, utan "innehåller" sannolikheten $1 - 1/\sqrt{5}$ att mätningen av hörn k gav detta utfall. Därför kan vi räkna ut sannolikheten att *dessutom* få resultatet rött när vi mäter antingen hörn $k + 1$ eller $k - 1$ som

$$\begin{aligned} \left| \langle b | m_{k\pm 1} \rangle \right|^2 &= \left| \langle +1 | m_{k\pm 1} \rangle - \langle m_k | m_{k\pm 1} \rangle \langle +1 | m_k \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \langle +1 | m_{k\pm 1} \rangle - 0 \cdot \langle +1 | m_k \rangle \right|^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Sannolikheten för att få resultatet blått-rött blir därför också $1/\sqrt{5}$ (vilket också följer från att de två operatorerna kommuterar) vilket ger sannolikheten för blått-blått som $1 - 2/\sqrt{5}$.

obestämt, utan "fanns" inte ens innan mätningen. Varje hörns uppmätta värde påverkas av det närliggande mätta hörnets värde, trots att närliggande hörns mätprojektorer kommuterar. Detta är kontextualitet.

Observera dock att Mermin-Peres magiska kvadrat och pentagonexperimentet skiljer sig åt på en viktig punkt. I pentagonexperimentet måste vi göra om varje mätning många gånger för att få ett statistiskt säkert resultat. I Mermin-Peres kvadrat får man en logisk motsägelse mot antagandet om förutbestämda värden redan då man mätt varje rad och varje kolumn en gång. Den senare ger en absolut motsägelse medan pentagonen "bara" ger en statistisk motsägelse.

En kontextuell verklighet

Att vår värld verkligen har dessa kontextuella drag har visats i flera experiment, bland annat av Mohamed Bourennanes grupp vid Stockholms universitet². De experimentella resultaten är helt i linje med teorins förutsägelser.

² Se till exempel E. Amselem, M. Rådmark, M. Bourennane och A. Cabello, *State-independent quantum contextuality with single photons*, Phys. Rev. Lett. **103**, 160405 (2009) (DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.160405).

Kvantmekanikens icke-lokalitet har diskuterats livligt under lång tid. Redan Einstein ogillade ju starkt att sammanflätade tillstånd har icke-lokala egenskaper. Idag har dock de flesta fysiker accepterat att Naturen på en fundamental nivå är icke-lokal (alternativt ”icke-realistisk” – se vidare Jan-Åke Larssons bidrag i denna volym). Vad som är anmärkningsvärt är dock att kvantmekanikens contextualitet inte tilldragit sig mer uppmärksamhet. Denna förutsätter ju inte ens sammanflätade tillstånd³ utan gäller en mycket större klass av system. Kanske bör framtida läroböcker i kvantmekanik bättre lyfta fram att Naturen inte bara är icke-lokal utan även kontextuell.

Vad är då den viktigaste konsekvensen av contextualiteten? Förmodligen att vi människor måste byta synsätt. Naturen är på en fundamental nivå kontextuell, så vår magreflex att tro att system har bestämda inneboende egenskaper, oavsett om någon har mätt upp dem eller inte, måste vi överge. Detta kommer dock att vara svårt, för de flesta mätningar ger icke-kontextuella resultat; det behövs speciella kombinationer av mätningar för att contextualiteten ska framträda, lite som att synvillor bara lockas fram av speciella kombinationer av visuella element. Således kommer de flesta av våra intryck av vår omgivning att vara icke-kontextuella, och från det är det frestande att dra den inkorreakta slutsatsen att Naturen i sig själv är icke-kontextuell i grunden.

Nyligen har det visats att contextualitet och icke-lokalitet kan vara ömsesidigt uteslutande⁴. Ett system som bryter mot den gräns icke-kontextualiteten ställer på det pentagramsystem vi beskrivit ovan (dvs. att medelvärden av kanter med olika färgade hörn ≤ 4) kan inte samtidigt bryta mot en Bell-olikhet (en olikhet som begränsar ett systems icke-lokalitet och grad av sammanflätning) och vice versa. Implikationerna och generaliteten av detta resultat är ännu oklara. Är det alltid så att contextualitet utesluter icke-lokalitet och vice versa, eller är det bara speciella system som visar denna dualitet? Svaret på denna fråga har vi ännu inte. (Här är det dock viktigt att komma ihåg att contextualitet kräver speciella val av observabler, medan påvisande av icke-lokalitet kräver speciella

3 Däremot kommer några av mätningarna i kvadraten att skapa sammanflätning eftersom mätoperatorerna är icke-lokala och påverkar två partiklar samtidigt.

4 Se P. Kurzyński, A. Cabello och D. Kaszlikowski, *Fundamental monogamy relation between contextuality and nonlocality*, Phys. Rev. Lett. **112**, 100401 (2014). Här visas motsatsförhållandet mellan contextualitet och icke-lokalitet. (DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.100401).

val av system, så många val av observabler och system är vare sig kontextuella eller icke-lokala.)

Mycket tyder dock på att kontextualitet är en ”kvantresurs” som kan nyttiggöras, precis som sammanflätning har visat sig användbart för till exempel kvantkryptografi och kvantberäkningar. Vad som förefaller klart är att kontextualitet är något som kommer att bli allt mer uppmärksammat framöver, och kanske visar det sig till och med vara en viktig egenskap hos Naturen. ❖

För vidare läsning

- A. Peres, *Incompatible results of quantum measurements*, Phys. Lett. A **151**, 107-108 (1990) (DOI: 10.1016/0375-9601(90)90172-K). Ett preludium till Mermin-Peres magiska kvadrat.
- N. D. Mermin, *Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems*, Phys. Rev. Lett. **65**, 3373-3376 (1990) (DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.3373). Mermin generaliserar Peres resultat till den magiska kvadraten som fungerar för alla preparationer av två spinn-1/2 system.
- N. D. Mermin, *Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory*. Physics Today, April 1985, 38-47 (DOI: 10.1063/1.880968). En läsvärd artikel om kontextualitet och icke-lokalitet som dock fokuserar på det senare.
- R. Wright, *The State of the Pentagon*, publicerad i *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, red. A. R. Marlow (Academic Press, San Diego, 1978), p. 255. Här visas att fem mätningar räcker för att påvisa kontextualitet.
- S. Kochen och E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics **17**, 59-87 (1967) (DOI: 10.1512/iumj.1968.17.17004). I denna tidiga artikel används 117 mätningar för att påvisa kontextualitet.