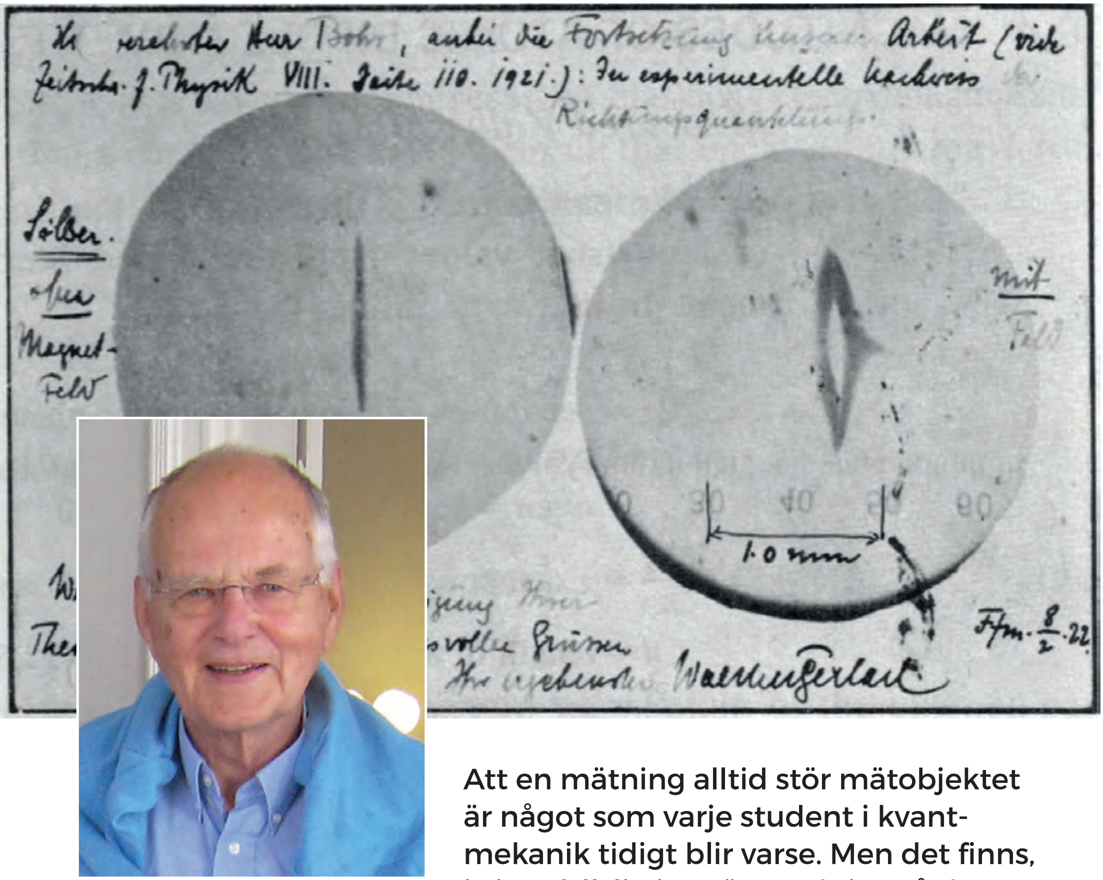


Bengt E Y Svensson

är professor emeritus i teoretisk fysik vid Lunds universitet. Han har under senare år intresserat sig för det kvantmekaniska mätproblemet, särskilt så kallade svaga mätningar, och vilken betydelse man kan ge ett ”svagt värde”. Han är en flitig skribent, även i dagspressen, och har under många år ägnat sig åt att göra kvantmekanik, och modern fysik över huvud taget, begriplig för en bred intressekrets.

Att en mätning alltid stör mätobjektet är något som varje student i kvantmekanik tidigt blir varse. Men det finns, i vissa fall, listiga sätt att kringgå detta. Ett är att utnyttja en så kallad svag mätning. Om en sådan kombineras med ytterligare en mätning, som man använder för att göra ett visst urval av data, kan dessutom märkvärdiga förstärkningseffekter uppstå. Men vad är egentligen en rimlig tolkning av de mätresultat man erhåller på detta vis? Bengt E Y Svensson förklarar och ger sin syn på debatten.

Bilden: Vykort från Walther Gerlach till Niels Bohr. Se vidare sid 131.

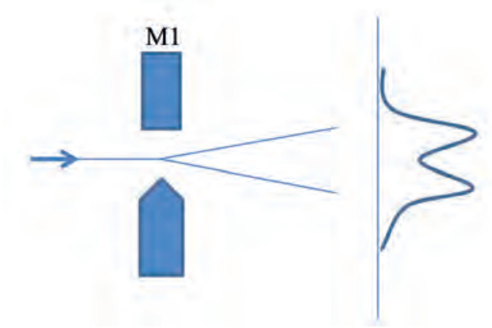
Svaga mätningar och svaga värden

Frågorna kring mätningar i kvantmekaniken tog en delvis ny vändning 1988 när Yakir Aharonov – känd bland annat för att ha identifierat den så kallade Aharonov-Bohm effekten – tillsammans med sina israeliska kollegor David Albert och Lev Vaidman, publicerade ett arbete med titeln ”How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-½ Particle Can Turn Out to be 100”. De visade i den artikeln att om man på ett listigt sätt gör vissa mätningar allt svagare och svagare så kan man uppnå vissa förstärkningseffekter.

Det har faktiskt uppstått ett om än begränsat forskningsfält inom kvantmekaniken med syftet att förstå svaga mätningar och att finna tillämpningsområden för dem. Jag skall i den här artikeln redogöra för bakgrunden till denna utveckling och några av de resultat som man uppnått. (För en allmän behandling av mätningar i kvantmekaniken hänvisar jag till Erik Karlssons artikel i denna volym.)

Ett modifierat Stern-Gerlach-experiment

Låt mig börja med att beskriva vad metoden går ut på genom att redogöra för det så kallade Stern-Gerlach-experimentet, uppkallat efter de tyska fysikerna Otto Stern och Walther Gerlach som för första gången utförde det 1922. (Stern fick Nobelpriset i fysik 1943 för detta.) Det är ett experiment för att påvisa partiklars spinn. I detta klassiska atomfysikaliska försök skickas en stråle av partiklar med spinn = 1/2 (ursprungligen silveratomer) genom ett inhomogent magnetfält för att därefter registreras på en skärm (se figur 1 på nästa sida). Med lämplig utformning av magnetfältet får man då en uppdelning av den inkommande strålen efter spinnet hos partiklarna: partiklar med spinn upp går uppåt (dvs. de beskrivs



Figur 1: Principskiss över Stern-Gerlach-försöket. En stråle av partiklar med spinn = 1⁄2 kommer från vänster in mot en lämplig magnet, M1, där strålen splittras upp beroende på om spinnet är upp eller ned. Fördelningen av partiklarna på skärmen till höger visar denna uppdelning.

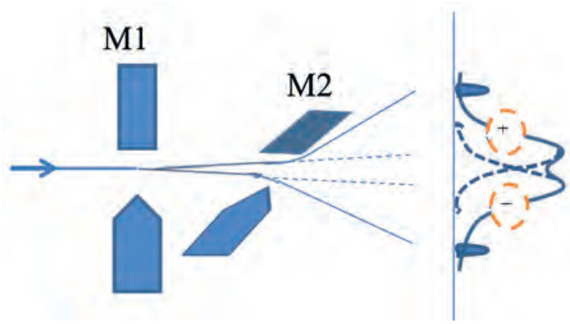
av en vågfunktion som har sitt största värde ovanför mitten), medan de som har spinn ned går nedåt (störst vågfunktion nedanför mitten). Avståndet mellan de två träffområdena på skärmen är ett direkt mått på magnetfältets styrka.

Låt mig nu komplicera experimentet genom att lägga till ytterligare en magnet, M2, mellan den ursprungliga, M1, och skärmen (figur 2). Låt mig vidare anta att M2 ger en uppdelning av strålen i en annan riktning än den ursprungliga. För en given sådan M2-riktning väljer man sedan bara ut de partiklar som har sitt spinn i den positiva (eller i den negativa) riktningen för M2. Man säger att man gör ett ”efterval”. De två små topparna i figur 2 svarar mot dessa två olika möjliga efterval (det vill säga mot två olika inställningar av mätapparaturen).

Nu kommer det intressanta. Genom att försvaga magnetfältet i magneten M1 kommer topparna i uppställningen utan magneten M2 att mer och mer smälta ihop; upplösningen blir allt sämre. Men med M2 på plats, och genom att välja dess riktning på lämpligt sätt, samt genom att bara registrera de eftervalda partiklarna på skärmen, kan man faktiskt få upplösningen mellan partiklar upp och partiklar ned att bli i princip hur stor som helst: avståndet mellan de två ställen på skärmen, som träffas av den övre respektive den nedre eftervalda strålen, kan bli godtyckligt stort. Den svaga påverkan, den ”svaga mätningen” i den första magneten, M1, i kombination med ”eftervalet” i den andra, M2, kan ge en mycket stor förstärkningseffekt, i själva verket allt större ju svagare magnetfältet i M1 är.

Förklaring av förstärkningseffekten

Varför kan det bli så? Och finns det ingen ”baksida”, någon negativ aspekt, på experimentet?



Figur 2: Med ytterligare en magnet, M2, och med en allt svagare magnet M1, kommer visserligen de ursprungliga två topparna att nästan smälta samman. Men genom lämplig riktning av M2, och genom att bara välja ut de partiklar som har spinnet upp (respektive ned) i förhållande till M2, kan man få de ursprungliga vågfunktionerna att vara i motfas (markerat med + respektive – i figuren) och nästan släcka ut varandra. Kvar blir bara två nya små toppar på stort avstånd från varandra, som kan bli mycket större än avståndet mellan topparna i figur 1. Detta kan ses som en förstärkningseffekt.

Att det kan bli som beskrivits är en kvantmekanisk interferenseffekt: genom eftervalet kan de två vågfunktioner, som svarar mot att elektronerna går uppåt respektive nedåt efter magneten M1, fås att (i det närmaste) släcka ut varandra. Utsläckningen blir allt bättre ju mera lika varandra de båda vågfunktionerna är, alltså ju svagare magneten M1 är och därför ju mindre avståndet mellan topparna utan efterval är. Kvar efter denna nästan-utsläckning blir, visar det sig, bara en liten rest i den eftervalda totala vågfunktionen, men en rest som ligger långt från mittvärdet. Det är denna lilla rest som nu ger sannolikhetsfördelningen för de partiklar som man iakttar på skärmen, i figur 2 åskådliggjort med de två små rester som finns kvar för de två möjliga eftervalen i magneten M2.

Baksidan av myntet är att sannolikheten för att över huvud taget få några eftervalda partiklar på skärmen blir allt mindre. Så för att göra experimentet med rimlig statistik måste man ha tålamod och kunna tolerera att de allra flesta partiklar som skjuts in genom den första magneten väljs bort och inte kommer till användning.

Om de flesta partiklar inte kommer till användning blir frågan naturligtvis: Vinner man verkligen något i noggrannhet eller precision med att göra ett sådant restriktivt efterval? Nog försvinner det därigenom nyttig information? Svaret på frågan beror i hög grad på hur man gör jämförelsen. För ett ”idealt” experiment, med hänsyn taget enbart till statistiskt och kvantmekaniskt ”brus” (kom ihåg obestämdhetsprincipen!), är det teoretiska svaret att en svag mätning aldrig kan bli mera precis än en stark.

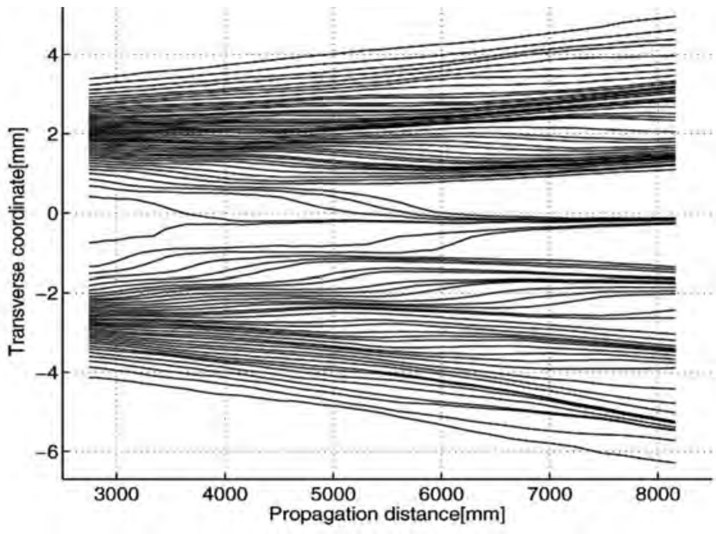
Men experimentatorerna är ofta slugare än teorin! Således kan man ibland åstadkomma att de bortvalda partiklarna återförs till den inkommande strålen och på så sätt återanvänds, vilket ger ökad statistisk precision i den svaga mätningen. Det finns också andra felkällor än de statistiska och de kvantmekaniska, till exempel sådana som härrör från okontrollerbart brus i den experimentella apparaturen; påverkan från detta så kallade ”tekniska brus” blir i många fall mindre i svaga mätningar. Att mäta såväl den reella som den imaginära delen av det svaga värdet (se nedan) visar sig också kunna hjälpa. Svaga mätningar har alltså en given plats i en fysikers uppsättning av mätverktyg. Men de måste väljas med urskiljning.

Några tillämpningar

I de experiment som verkligen gjorts och som utnyttjar denna kombinerade effekt av svag mätning och efterval är partiklarna oftast fotoner. Spinnets roll spelas då av fotonernas polarisation, och magneterna ersätts av olika anordningar för att manipulera polarisationen. Man har då kunnat åstadkomma kraftiga förstärkningar, upp mot en faktor tiotusen. På detta sätt har man exempelvis lyckats iaktta vinkeländringar av storleksordningen 10^{-13} radianer och lägesändringar av storleksordningen 10^{-14} meter.

Svaga mätningar har också andra tillämpningar, som bygger på att de påverkar mätobjektet väldigt lite. En normal, ”stark” mätning stör mätobjektet kraftigt; man talar om att ”vågfunktionen kollapsar”, att man (i allmänhet) helt förändrar det kvantmekaniska tillstånd som undersökningsobjektet befann sig i ögonblicket före mätningen. Men en svag mätning lämnar försöksobjektets vågfunktion i det närmaste opåverkad, så att man kan göra nya mätningar på föremålet under i stort sett oförändrade villkor.

Till exempel kan man med denna metod undersöka partikelbanorna i ett dubbelspaltexperiment. Den vanliga invändningen att en mätning ”förstör” interferensen gäller inte för svaga mätningar. Men eftersom protokollet för de svaga mätningarna är grundat på statistik för många mätningar är det inte fråga om en mätning av varje enskild partikels bana, utan enbart mätning av



Figur 3: Resultatet av mätning av "medelbanorna" för partiklarna (fotoner) i ett dubbelspaltexperiment. (Motsvarigheten till) spaltskärmen har två (motsvarigheter till) spalter på knappt 5 mm avstånd från varandra. Den är uppställd dryga tre meter till vänster om den vertikala axeln. Partikellägena har registrerats på (motsvarigheten till) en detektorskärm uppställd på olika avstånd som anges på den horisontella axeln. Även om varje bana inte svarar mot en partikels bana utan är resultatet av många (svaga) mätningar, illustrerar ändå figuren väl dubbelspaltexperimentet.

(Från S. Kocsis, B. Braverman, S. Ravets, M.J. Stevens, R.P. Mirin, L. K. Shalm och A.M. Steinberg, *Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interfero*meter, Science **332**, 1170 (2011). (DOI: 10.1126/science.1202218).)

medelvärdet av partikelns läge i form av "medelbanor". Man får ändå en rätt god bild av vad som försiggår – se figur 3.

Likaså kan man genom en listig manöver direkt bestämma vågfunktionen $\Psi(x)$ för en partikel utan att, som man tidigare trodde, vara tvungen att gå omvägen via mätningen av sannolikheten $|\Psi(x)|^2$.

Det svaga värdet

Vad jag beskrivit i mera allmänna ordalag hittills kan ges en mera formell framställning som jag nu vill redogöra för, dock utan att gå in i detaljerna.

Utgångspunkten är det mätprotokoll som formulerades av John von Neumann redan 1932. I det föreställer man sig att det, förutom det föremål som man undersöker, finns en mätapparat kopplad till objektet. Mätapparatens utslag beskrivs synnerligen förenklat av en visare som har *en* frihetsgrad, kvantmekaniskt beskriven av en lägesoperator Q_m. Egenvärdena till denna operator betecknas q. Låt vidare $\varphi(q)$ vara vågfunktionen för denna visare, så att $|\varphi(q)|^2$ alltså ger sannolikhetstätheten för att visaren skall ge utslaget q.

Det hela är ordnat så att i normala fall – utan något antagande om svaga mätningar – denna vågfunktion har sina toppar, dvs. ger stor sannolikhet, för de värden på visarvariabeln q som svarar mot egenvärdena för den operator som representerar den storhet vi önskar mäta, till exempel föremålets spinn.

Låt mig allmänt beteckna den operator man studerar med A; i till exempel det modifierade Stern-Gerlach-experimentet ovan är A spinnet (eller egentligen en av spinnkomponenterna) för partiklarna. Det von Neumannska protokollet är således konstruerat så att det återger den kvantmekaniska regeln att en mätning av den storhet som beskrivs av operatorn A ger som resultat ett egenvärde till A. Vidare finner man att medelvärdet för visarutslaget efter många mätningar ges av $\langle v|A|v\rangle$, dvs. av det kvantmekaniska väntevärdet av operatorn A för ingångstillståndet $|v\rangle$.

Aharonov och hans medförfattare gör nu två viktiga preciseringar.

Den ena består i att de inte bara utgår från att objektets *ingångstillstånd* $|v\rangle$ är givet; i deras terminologi är tillståndet $|v\rangle$ ”förvalt”. De föreställer sig också att man bara är intresserad av ett speciellt, angivet *sluttillstånd* $|w\rangle$, dvs. att man också gör vad de kallar ett ”efterval”.

Den andra preciseringen innebär att de bara är intresserade av det fall då mätningen är ”svag”, dvs. att kopplingen mellan mätapparat och föremål är liten: om kopplingens styrka anges med en ”kopplingskonstant” g, är Aharonov och medförfattare intresserade av *små* värden på g. I själva verket är detta den helt motsatta situationen till hur von Neumann föreställde sig tillämpningen av hans protokoll, nämligen att det skulle gälla för stora värden på g.

Lika fullt kan protokollet utnyttjas också för små g-värden. Resultatet är något överraskande: vågfunktionen för mätapparaten får inte längre toppar svarande mot egenvärden för A utan istället en topp svarande mot det ”svaga värdet” A_{svag} givet av

$$A_{\text{svag}} \equiv \frac{\langle w|A|v\rangle}{\langle w|v\rangle}$$

(Strängt taget gäller detta bara om det svaga värdet A_{svag} är ett reellt tal. Det kan vara komplext, men då måste formalismen utvidgas, något som jag dock inte går in på här.)

Mera precist gäller i gränsen när kopplingskonstanten g är liten att medelvärdet av visarutslaget blir direkt proportionell mot A_{svag} (med allt större noggrannhet ju mindre g är), inte alls mot $\langle v|A|v\rangle$, som ursprungligen enligt von Neumann.

Några ytterligare förhållanden måste också uppmärksammas. Som framgår av uttrycket för det svaga värdet kan ett önskvärt stort värde på A_{svag} åstadkommas genom ett litet värde på amplituden $\langle w|v\rangle$ i nämnaren. Men detta innebär samtidigt att sannolikheten $|\langle w|v\rangle|^2$ för att finna sluttillståndet $|w\rangle$ blir liten: en stor förstärkningseffekt i den svaga mätningen har nackdelen att bara en liten andel av de inkommande tillstånden kommer till användning. För att få godtagbar noggrannhet måste man därför göra många mätningar.

Vi kan nu förstå den situation som det modifierade Stern-Gerlach-experimentet i figur 2 uppvisar. Det är lätt att se att det numeriska värdet av A_{svag} kan bli hur stort som helst – till exempel genom att välja $|w\rangle$ så att $\langle w|v\rangle$ blir hur litet som helst (dock inte lika med noll, för då gäller inte härledningen!) – innebärande att visaren kan göra ett hur stort utslag som helst, i detta fall att de små topparna i figur 2 kommer mycket långt från varandra. I den meningen kan spinnet vid en svag mätning förefalla ha värdet 100 istället för 1/2 som man vanligen väntar sig!

Vad betyder det svaga värdet?

Men vad är det egentligen det svaga värdet *betyder*? I Stern-Gerlach-experimentet är det i varje fall inte något i den kvantmekaniska formalismen som säger att visarutslaget kan tolkas som egenskapen spinn hos mätobjektet: bara för att mätapparatens visare i ett protokoll *á la* von Neumann hamnar på ett visst värde följer det ju inte att detta värde svarar mot någon konventionellt bestämd egenskap hos det undersökta objektet. Att påstå att spinnet hos partikeln är 100 har alltså inget berättigande.

I själva verket råder det oenighet om tolkningen av det svaga värdet. Medan Aharonov och hans medarbetare vill ge en tolkning av ett svagt värde A_{svag} som analogt till ett medelvärde $\langle v|A|v\rangle$, hävdar andra, däribland jag själv, att en sådan tolkning inte är rimlig.

Som exempel kan nämnas att Aharonov med kollegor använt sig av svaga värden för att belysa paradoxer av typen Hardys paradox, den som jag behandlat i min artikel om paradoxer i denna volym. De låter då operatorn A stå för den storhet som anger antalet elektron-positron-par i en given kombination av två av kanalerna a^+, b^+, a^- och b^- i figur 3 i min paradoxartikel.

Storheten A är alltså nu en antalsstorhet som anger hur många partikelpar *per inkommande par* som har passerat genom just den valda kombinationen av kanaler i Hardys uppställning.

Man väntar sig då att dessa antalsstorheter har följande två egenskaper. Dels skall värdet för var och en av dem ligga mellan noll (inget partikelpar uppträder i den kanalkombinationen) och ett (paret går alltid genom just den kanalkombinationen). Dels väntar man sig att summan över alla kanalkombinationer skall bli ett: det måste ju alltid finnas precis ett partikelpar någonstans i uppställningen.

Det förval, som Aharonov och medförfattare gör, svarar mot att ett elektron-positron-par kommer in i uppställningen genom respektive ingångsport som samma figur åskådliggör. Som efterval anger de lämpliga kombinationer av klick i detektorerna $D1^+$, $D2^+$, $D1^-$ och $D2^-$.

De finner då att det svaga värdet för antalsstorheten för en viss kombination av kanaler blir lika med 2. Aharonov och medförfattare tolkar detta så att det går två partikelpar per inkommande elektron-positronpar genom just den kanalkombinationen! Men det kompenseras av att det svaga värdet av antalsstorheten för en annan kanalkombination samtidigt är lika med −1, vilket gör att det allt som allt ändå bara finns ett partikelpar per inkommande elektron-positronpar i uppställningen!

Opponenterna mot en sådan tolkning påpekar att denna ”antalstolkning” av det svaga värdet, förutom att den ger i hög grad okonventionella resultat, inte går att motivera med de grundläggande kvantmekaniska postulaten. Kritikerna hänvisar bland annat också till att dessa svaga värden har de numeriska värdena 2 respektive −1 bara för de speciella eftervalen som görs. För andra efterval kan man få bråktalsvärden för det svaga värdet, ja ibland till och med komplexa värden, vilka är minst sagt svåra att ge en antalstolkning!

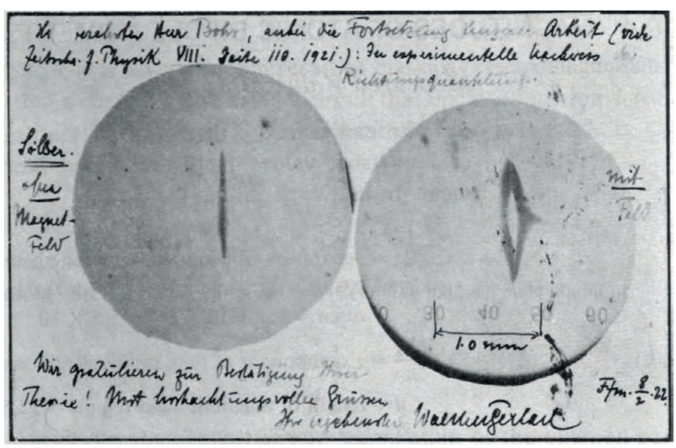
För den som vill tränga djupare in i denna debatt hänvisar jag till den litteratur som nämns nedan. ❖

Artikeln är en omarbetad och utvidgad version av artikeln ”Mer för mindre – om svaga mätningar i kvantmekaniken” i Fysikaktuellt, nr 3 (2012).

För vidare läsning

Min översiktsartikel *Pedagogical Review of Quantum Measurement Theory with an Emphasis on Weak Measurements*, Quanta 2(1), 18 (2013) (DOI: 10.12743/quanta.v2i1.12), ger ytterligare kött på benen kring svaga mätningar och vad det svaga värdet kan betyda. Den i artikeln om kvantmekaniska paradoxer nämnda boken av Aharonov och Rohrlich behandlar också svaga mätningar.

Exemplet med svaga värden och Hardys paradox finns behandlat i Y. Aharonov, A, Botero, S. Popescu, R. Reznik och J. Tollaksen, *Revisiting Hardy's paradox: counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak values*, Physics Letters A **301**, 130 (2002) (DOI: 10.1016/S0375-9601(02)00986-6).



Vinjettbilden: Vykort från Walther Gerlach till Niels Bohr, daterat 8 februari 1922, som visar experimentresultatet där en stråle av silveratomer delas upp i ett inhomogent magnetfält (till vänster utan magnetfält, till höger med). Gerlach skriver: ”Bifogat är det experimentella beviset för riktningskvantiseringen. Vi gratulerar dig till att din teori har bekräftats!”