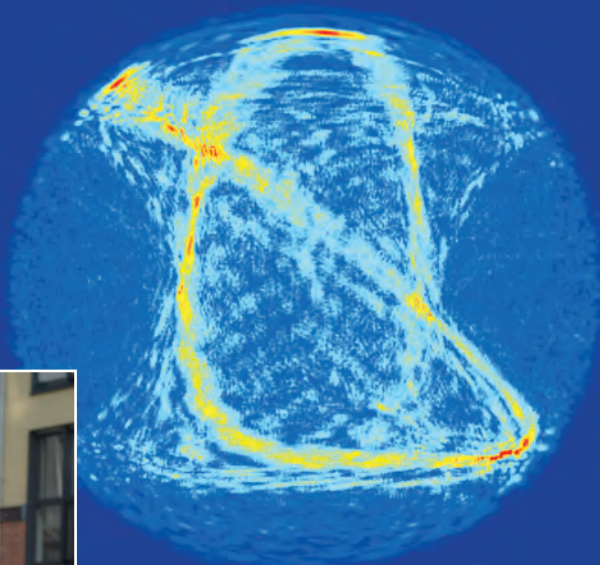


**Jonas Larson**

är docent vid Fysikum, Stockholms universitet. Kvantmekanik är den gemensamma nämnaren i hans forskning, som kan handla om allt från enstaka kvantbitar i en kvantdator till Bose-Einsteinkondensat bestående av miljontals atomer. Nyfikenheten att förstå hur världen kan beskrivas av kvantmekanik ser han som sin huvudsakliga drivkraft.



Kaos är ett vanligt och väl studerat fenomen inom klassisk fysik. I kvantfysiken visar sig fenomenet vara desto svårare att få grepp om. Kaotiskt beteende tycks till och med, vid en första anblick, vara en kvantmekanisk omöjlighet! Jonas Larson förklarar bakgrunden till dilemmat, pekar på möjliga utvägar och anger riktningar för fortsatt forskning.

Bilden: Spår av klassiskt beteende i kvantmekaniken – ett så kallat kvantärr. Se texten.

Kan kaos finnas?

Det finns många skillnader mellan kvantmekaniken, som beskriver det allra minsta, och den äldre klassiska fysiken, som fortfarande beskriver vår makroskopiska värld väl. Ett välkänt exempel rör den totala energin för slutna system (som exempelvis elektroner bundna till en atomkärna): enligt klassisk fysik så ska energin kunna anta vilka värden som helst, medan den, enligt kvantfysiken, är begränsad till vissa specifika värden. När det gäller frågor om hur den klassiska fysikens egenskaper och lagar uppstår från kvantmekaniken talar man ofta om ”den klassiska gränsen”. Just när det gäller skillnaden mellan den klassiska fysikens kontinuerliga energispektrum och kvantfysikens energinivåer är den klassiska gränsen inte så svår att förstå. Ett exempel på när det blir desto knepigare är Schrödingers katt som, enligt kvantmekaniken, förefaller vara levande och död på samma gång, men som enligt den klassiska fysiken förstås alltid är antingen levande eller död.

Ett mindre känt exempel på när den klassiska gränsen ger upphov till problem rör fenomenet kaos: matematiskt är kaotiska beteenden en följd av icke-linjäritet, något som naturligt uppstår i klassiska system. Men Schrödingers ekvation, som ju beskriver den mikroskopiska världen, är linjär. Därför borde vi inte kunna förvänta oss att finna kaos i kvantmekaniska system. Om vi nu tror att kvantmekaniken är en mer grundläggande – och mer korrekt – beskrivning av världen än den klassiska mekaniken uppstår frågan: Hur kan det komma sig att vår värld bevisligen uppvisar kaos trots att kvantmekaniken tycks förbjuda det? I den här artikeln ska vi försöka reda ut denna paradox. För att bättre förstå det grundläggande dilemmat börjar vi med att titta på hur kaos uppstår i den klassiska mekaniken.

Klassiska dynamiska system och tidig kvantmekanik

De lagar som Isaac Newton skrev ner redan på 1600-talet, och som lade grunden för klassisk mekanik, beskriver i mångt och mycket det vi upplever runt omkring oss i vår vardag. Specifikt så kopplar lagarna samman krafter med kroppars rörelse: givet ett föremåls initialtillstånd, dvs. dess läge och hastighet vid en viss tidpunkt, och de krafter som verkar på föremålet, så är dess vidare tidsutveckling fullständigt bestämd. För, säg, en partikel så ger Newtons ekvationer partikelns framtida position $\mathbf{x}(t)$ och rörelsemängd $\mathbf{p}(t)$ som funktioner av tiden t . Variablerna \mathbf{x} och \mathbf{p} är normalt vektorer om partikeln rör sig i mer än en dimension – antalet komponenter i vektorn är detsamma som dimensionen D . Vi kan fullständigt beskriva partikelns öde med vektorn $\mathbf{R}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ som beskriver en bana i ett $2D$ dimensionellt så kallat *fasrum*. Det betyder att för en partikel i tre rumsliga dimensioner har fasrummet sex dimensioner. Fasrummet består alltså av alla tillåtna och tänkbara banor, och känner vi till strukturen hos fasrummet vet vi därför hur systemet utvecklas givet ett godtyckligt initialtillstånd $\mathbf{R}(0) = (\mathbf{x}(0), \mathbf{p}(0))$: systemet kommer att följa den unika bana som passerar genom initialtillståndet.

Om systemet är slutet, dvs. om det inte påverkas av några yttre krafter, är dess totala energi bevarad. I sådana fall är det ofta lämpligt att använda en alternativ beskrivning till Newtons, nämligen det som brukar kallas *analytisk mekanik*, där rörelseekvationerna fås från antingen en *Lagrangian* eller en *Hamiltonian*. Dessa formalismer utvecklades ett par hundra år efter Newton av Joseph-Louis Lagrange respektive William Hamilton. Precis som för kvantmekanik så svarar systemets *Hamiltonian* H för den totala energin. Givet H så erhålls de klassiska rörelseekvationerna från

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (1)$$

där p_i och x_i är så kallade kanoniska variabler. Dessa variabler kan väljas på många olika sätt, utan att formen (1) för rörelseekvationerna ändras (något som strax ska visa sig betydelsefullt). Man byter från en sådan uppsättning variabler till en annan via en så kallad kanonisk transformation.

Att energin är bevarad innebär att varje lösningsbana i fasrummet är begränsad till en hyperyta som bestäms av

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = E$$

Figur 1: Schematisk bild av hur en lösning $(x(t), p(t))$ (grön kurva) rör sig runt en torus och bildar en periodisk rörelse.

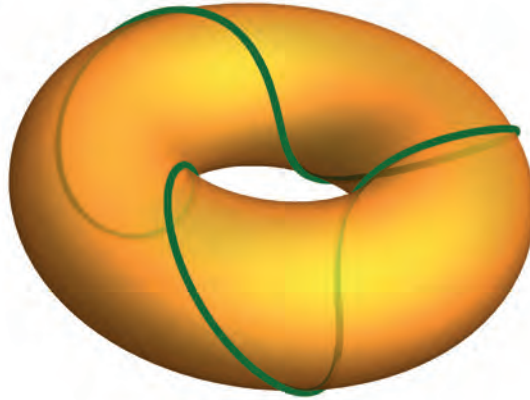


BILD: THOMAS KVORNING

för ett visst värde på energin E . Det vill säga: en bana som börjar vid en viss energi E kommer att förbli i den hyperyta som motsvarar den energin. Om det finns andra konserverade storheter utöver energin sätter de ytterligare villkor för banornas form i fasrummet; banorna måste då förbli i ännu mer begränsande ytor. Varje konserverad storhet är direkt knuten till en symmetri hos systemet, vilken i sin tur avspeglas i en transformation som lämnar Hamiltonianen invariant. Om systemet exempelvis utgörs av en partikel i en potential som enbart beror på radien och inte på några vinkelkoordinater, så är Hamiltonianen invariant under rotationer. Denna symmetri kommer ge upphov till att det så kallade rörelsemängdsmomentet är bevarat. Att identifiera alla symmetrier kan dock vara allt annat än enkelt i komplicerade modeller med många frihetsgrader.

Man kan visa allmänt att om antalet konserverade storheter överstiger antalet frihetsgrader så har ytorna, som lösningarna rör sig på i fasrummet, formen av en torus¹, se figur 1. Efter tillräckligt många varv runt torusen så kommer varje lösning tillbaka ungefär till sin startpunkt – lösningarna är kvasiperiodiska. Naturligtvis finns det också lösningar som är exakt periodiska – de enklaste är de som går ett enda varv runt torusen innan de återkommer. Som ett exempel, låt oss ta en bunden partikel i en harmonisk potential. Där vet vi att för vissa initialtillstånd kommer partikeln tillbaka till sitt starttillstånd redan efter en enda svängning, och det är dessa

¹ Detta gäller för bundna system, dvs. sådana där fasrumskoordinaterna är begränsade till ett visst område för given energi. För obundna system får man oändliga plan.

lösningar som svarar mot att gå runt torusen ett varv. För en harmonisk potential i en enda dimension blir bilden särskilt enkel då alla banor i fasrummet är cirklar, men argumentet kan enkelt generaliseras till högre dimensioner. Skillnaden blir bara att man då även får lösningar som behöver gå runt torusen flera varv innan de återkommer till startpunkten. System som visar denna typ av dynamik kallas *integrerbara* och är motsatsen till kaotiska system – dynamiken är reguljär.

För sådana integrerbara system är det praktiskt att göra en (kanonisk) transformation som tar oss från de kanoniska variablerna \mathbf{x} och \mathbf{p} till nya kanoniska variabler som brukar benämnas *vinkel-verkanvariabler*. Den ena variabeln – verkanvariabeln, låt oss kalla den J – parametriserar torusarna, medan den andra – vinkelvariabeln ω – ger vinkeln (positionen) på en given torus. Efter variabelbytet erhålls en ny Hamiltonian K , och eftersom J och ω är kanoniska så ges de nya rörelseekvationerna av precis samma uttryck som tidigare, ekv. (1). Det trevliga är att för integrerbara system visar det sig att transformationen alltid kan göras så att den nya Hamiltonianen K inte beror på vinkelvariablerna, utan endast på J . Enligt ekv. (1) följer då att verkanvariabeln blir rörelsekonstanter eftersom

$$\frac{dK(J)}{d\omega} = 0$$

En konsekvens av denna transformation är att vi kan skriva rörelseekvationerna för fasrumspositionen $\mathbf{R}(t)=(\mathbf{J}(t), \omega(t))$ som en matrisekvation

$$\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{R}(t) \quad (2)$$

där \mathbf{M} är en tidsberoende matris med dimensionen $2n$ (där n är antalet frihetsgrader). Man säger att ekvationerna är *linjära* då högerledet inte beror på kvadrater eller högre ordning av vinkelverkanvariablerna.

Klassiskt kaotiska system

För integrerbara system blir, som vi sett, dynamiken reguljär. Men vad händer när antalet konserverade storheter är färre än antalet frihetsgrader, dvs. om systemet inte längre är integrerbart? I

dessa fall saknas den specifika kanoniska transformation som tar oss från $\mathbf{R}(t)=(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ till $\mathbf{R}(t)=(\mathbf{J}(t), \boldsymbol{\omega}(t))$ och det finns ingen transformation som gör rörelseekvationerna linjära som i ekvation (2). Vi kan tänka oss en situation där vi startar från ett integrerbart system, och sedan lägger till en liten term till Hamiltonianen så att en eller flera konserverade storheter inte längre är bevarade. Ju större störningen är, desto mer kan vi förvänta oss att torusen deformeras och att dynamiken därmed blir mindre och mindre reguljär. (Detta är för övrigt grunden för vad som har kommit att kallas *Kolmogorov–Arnold–Mosers teorem*, eller kortare, *KAM-teoremet*.)

Så vi har alltså:

- Integrerbarhet (antal rörelsekonstanter \geq antal frihetsgrader) \leftrightarrow linjära rörelseekvationer \leftrightarrow reguljär dynamik.
- Ej integrerbarhet (antal rörelsekonstanter $<$ antal frihetsgrader) \leftrightarrow icke-linjära rörelseekvationer \leftrightarrow kaotisk dynamik.

Slutsatsen är att kaotiska system beskrivs av icke-linjära rörelseekvationer. Detta är, som vi strax ska se, grunden till den paradox som uppstår när vi försöker förstå klassiskt kaos som en följd av kvantmekaniken.

Även om vi kanske har en idé om vad vi menar med kaotisk dynamik så har vi inte definierat den i en strikt mening. Den definition som oftast förekommer handlar om ”*exponentiell känslighet för initialtillstånd*”. Det är också detta man syftar på när man talar om ”fjärilseffekten”: en liten störning (som en fjärils vingslag) kan få oanade följder (som en storm på andra sidan jorden). Låt oss se hur vi kan formalisera denna tanke.

Antag att vi har ett initialtillstånd $\mathbf{R}_\varepsilon(0)$, där ε betecknar en liten störning så att $\mathbf{R}_0(0)$ är det ostörda initialtillståndet. För ett givet ε kan vi titta på hur avståndet mellan det ostörda och störda initialtillståndet tidsutvecklas:

$$\Delta(t) = |\mathbf{R}_\varepsilon(t) - \mathbf{R}_0(t)| \quad (3)$$

Från början, vid tiden $t = 0$, har vi att $\Delta(0)$ är av storleksordningen ε , och vi säger att systemet är kaotiskt om för korta tider

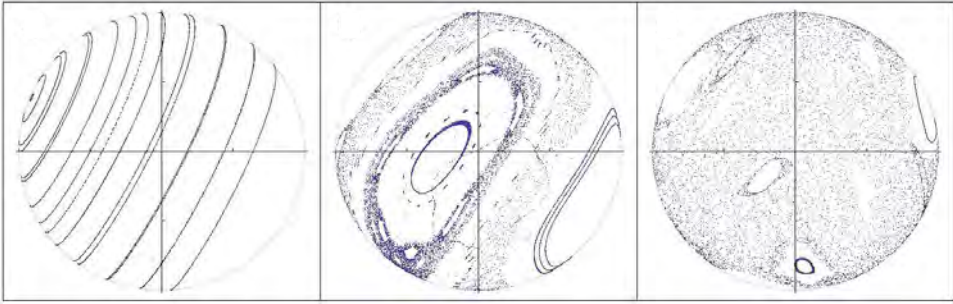
$$\Delta(t) = \varepsilon e^{\lambda t}$$

för något positivt värde på λ , kallad *Lyapunov-exponenten*. Uttryckt i ord: om två banor i fasrummet befinner sig väldigt nära varandra vid en viss tidpunkt, så kommer avståndet mellan dem att växa exponentiellt snabbt. Det exponentiella beroendet betyder att det blir extremt svårt att förutspå beteendet hos systemet efter tillräckligt långa tider. En följd av denna irreguljära kaotiska dynamik är att en bana på ganska kort tid kommer besöka alla tillgängliga hörn av fasrummet. Detta innebär även att partikeln efter väldigt lång tid kommer att ha tillbringat ungefär lika mycket tid på alla platser i fasrummet, något som kallas för *ergodicitet*.

En schematisk visualisering av hur kaos manifesteras är genom *Poincaré-snitt*. Om man tittar på ett plan i fasrummet som skär genom banorna så kommer varje enskild bana att passera igenom planet i en uppsättning punkter – formationen av dessa punkter är just Poincaré-snittet. För reguljär icke-kaotisk dynamik förväntar vi oss att i Poincaré-snittet se spår av den underliggande torusen, medan för kaotisk tidsutveckling så ska punkternas fördelning framstå som mer slumpmässig. Ett exempel taget från en modell som beskriver energiöverföring mellan en spinnande snurra och en harmonisk oscillator visas i figur 2. Här framgår hur strukturen ändras när man låter en parameter variera över en så kallad *kritisk punkt* som skiljer reguljär från kaotisk dynamik.

Kvantisering av klassiska system

För att bättre förstå problemet med kaos i kvantvärlden är det instruktivt att gå tillbaka till kvantmekanikens begynnelse. En av de mest uppenbara skillnaderna mellan klassisk mekanik och kvantmekanik är att för mikroskopiska system tillåts normalt enbart vissa diskreta energier, medan i princip alla energier är tillåtna i makroskopiska klassiska system. Proceduren att ”diskretisera” en modell kallas för just kvantisering. Den mest sofistikerade teorin som utvecklades innan Schrödinger 1925 lade fram den ekvation som nu bär hans namn är *Bohr-Sommerfeld-kvantisering*. Metoden utgår från klassisk mekanik, men antar att enbart ett fåtal lösningar är tillåtna. Mer precist, om vi betraktar en periodisk lösning så definierar verkanvariabeln J en yta i fasrummet (intuitivt: den yta som ryms innanför den slutna fasrumsbanan). Kvantiseringen består i att endast tillåta lösningar som ger areor på ytorna som är lika med en multipel av *Plancks konstant* h . Den minsta möjliga



Figur 2: Exempel på ett Poincaré-snitt för en så kallad Dickemodell: en spinnande snurra kopplad till en harmonisk oscillator. Från vänster till höger ökas kopplingen mellan de två delsystemen och kaos uppkommer. I den vänstra grafen är dynamiken regelbunden och punkterna ordnar sig längs olika kurvor. I den mittersta har den regelbundna dynamiken börjat deformeras och tecken på kaotiskt beteende kan anas. Slutligen, i den högra grafen, uppvisar systemet nästan fullständigt kaos, även om små "öar" med regelbunden dynamik lever kvar. Den högra grafen åskådliggör även fenomenet ergodicitet.

(Figur från A. Altland och F. Haake, *Equilibration and macroscopic quantum fluctuations in the Dicke model*, *New Journal of Physics* **14** (2012): 073011 (DOI: 10.1088/1367-2630/14/7/073011).)

nollskilda arean är då h , vilket också gett upphov till namnet på en sådan area: *Planckcell*. Planckcellen som minsta tillåtna area är nära kopplad till *Heisenbergs osäkerhetsrelation* som säger att vi inte på samma gång kan bestämma en partikels position och rörelsemängd – osäkerheten i läge gånger osäkerheten i rörelsemängd får som minst vara h . Vilket ju är precis arean av en Planckcell i faserummet.

Ett alternativt sätt att tänka på Bohr-Sommerfeld-kvantiseringen är att enbart ett helt antal *de Broglie-våglängder* får plats längs den klassiska lösningen. De Broglie-våglängden

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

är en våglängd som kan tillskrivas alla (massiva) partiklar med rörelsemängd p . Naturligtvis behöver p vara väldigt liten för att motsvarande våglängd inte ska vara försvinnande liten, vilket innebär liten massa m och/eller låg temperatur T (som bestämmer partikelns hastighet). Detta synsätt är analogt med hur enbart vissa toner kan uppstå från en svängande sträng, nämligen de där ett helt antal halva våglängder får plats längs strängen.

Bohr-Sommerfeld-kvantisering ger förvånansvärt bra förut-

sägelser (ibland även exakta) för många modeller. Däremot kan vi förstås inte använda den för att härleda existensen av en storhet som *spinn* vilket är av ren kvantmekanisk natur. Vanligtvis tänker vi på den ”klassiska gränsen” som att man låter Plancks konstant h gå mot noll. I denna gräns försvinner de Broglie-våglängden, och likaså Planckcellens area – vågnaturen hos partiklarna försvinner och följderna av Heisenbergs osäkerhetsrelation blir obetydliga.

Bohr-Sommerfeld-kvantiseringen länkar alltså samman klassiska integrerbara system med kvantmekaniska genom existensen av periodiska banor i fasrummet. Den naturliga frågan blir: Vad är motsvarande kvantiseringsprocedur för icke-integrerbara system, där det inte finns några sådana banor? Långt innan begreppet kvantkaos var myntat, och klassisk kaosteori fortfarande befann sig i ett tidigt skede, insåg Einstein att det uppstår problem när vi försöker använda metoden för att kvantisera modeller där man inte kan definiera vinkel-verkanvariablerna. Han publicerade en artikel redan 1917 som poängterade detta, men artikeln låg i stort sett i glömska fram till 70-talet då Martin Gutzwiller upptäckte den och lyfte fram den i det ljus den förtjänar. Samme Gutzwiller formulerade också ett alternativ till Bohr-Sommerfeld-kvantiseringen som kunde tillämpas på kaotiska system (dvs. icke-integrerbara). Vi går inte vidare in på Gutzwillers semiklassiska metod här, utan nöjer oss med att understryka att Einstein satte fingret på något djupare, nämligen att man stöter på problem när man försöker översätta klassiskt kaos till kvantmekaniska modeller.

Kvantkaos

Relaterat till de problem som uppstår då man försöker tillämpa Bohr-Sommerfeld-kvantisering på icke-integrerbara system är att Schrödingers ekvation, som beskriver tidsutvecklingen för kvantmekaniska system, är linjär. Kom ihåg att klassiskt kaos uppkom från icke-linjäritet hos rörelseekvationerna. Samtidigt är det just linjäriteten hos Schrödingers ekvation som ligger bakom superpositionsprincipen i kvantmekanik, så det är inget vi gärna ruckar på.

Den inbyggda linjäriteten tillsammans med att Hamiltonianen är hermitsk medför att tidsutvecklingen av ett kvantmekaniskt tillstånd, $|\Psi(0)\rangle \rightarrow |\Psi(t)\rangle$, alltid är *unitär*. Detta medför i sin tur att skalärprodukten mellan två olika tillstånd $|\phi(t)\rangle$ och $|\varphi(t)\rangle$ är bevarad i tiden, dvs. att $\langle\phi(t)|\varphi(t)\rangle = \text{konstant}$ (se sidorutan om

Unitär tidsutveckling

Unitära transformationer – så som tidsutvecklingen enligt Schrödingerekvationen – har egenskapen att de bevarar skalärprodukten mellan varje par av tillstånd. Låt oss titta närmare på varför det är så. Givet en Hamiltonoperator H kan vi införa en ny operator

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$$

där \hbar är Plancks konstant dividerad med 2π och där vi ska tänka på exponenten av operatoren H som motsvarande Taylorutveckling.

Schrödingerekvationen säger oss att tidsutvecklingen för ett initialtillstånd $|\psi(0)\rangle$ då formellt kan skrivas

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \quad \text{eller} \quad \langle\psi(t)| = \langle\psi(0)|U^\dagger(t)$$

där \dagger betecknar hermitekonjugatet, så att

$$U^\dagger(t) = e^{iHt/\hbar}$$

om vi använder att Hamiltonianen är hermitsk, dvs. att $H = H^\dagger$.

När vi kombinerar allt detta ser vi att man för godtyckliga tillstånd får

$$\langle\phi(t)|\varphi(t)\rangle = \langle\phi(0)|U^\dagger(t)U(t)|\varphi(0)\rangle = \langle\phi(0)|\varphi(0)\rangle$$

eftersom $U^\dagger U = 1$. Det vill säga: skalärprodukten mellan två tillstånd förändras inte i tiden.

unitär tidsutveckling). Skalärprodukten, eller ”överlappet”, mellan två tillstånd säger hur lika tillstånden är. I denna bemärkelse kallas skalärprodukten även *fidelitet*, och man skriver $F = \langle\phi|\phi\rangle$.

Observationen att fideliteten mellan två tillstånd är tidsberoende har intressanta konsekvenser. Om två (normerade) tillstånd är identiska är $F = 1$, medan om tillstånden är ortogonala (dvs. varandra uteslutande) är $F = 0$. I någon mening mäter alltså

$$D(|\phi\rangle, |\varphi\rangle) = 1 - F$$

avståndet, eller ”likheten”, mellan de två tillstånden $|\phi\rangle$ och $|\varphi\rangle$, på motsvarande sätt som avståndet $\Delta(t)$ i ekv. (3) mäter hur lika två klassiska lösningar är. I ett klassiskt kaotiskt system gällde att $\Delta(t)$ växer exponentiellt med Lyapunovexponenten λ , men uppenbarligen kan inte motsvarande beteende erhållas kvantmekaniskt eftersom fideliteten F är bevarad. Om vi exempelvis tittar på två initialtillstånd $|\Psi_0(0)\rangle$ och $|\Psi_\epsilon(0)\rangle$ som är väldigt lika ($F \approx 1$) måste de två tillstånden förbli lika för alla tider!

Vi får dock inte glömma att alla kvantmekaniska tillstånd

måste uppfylla Heisenbergs osäkerhetsrelation. Vilket, som redan nämnts, innebär att tillståndet inte kan bli mer lokaliserat i fasrummet än arean hos en Planckcell. Det betyder att det blir omöjligt att i strikt mening beskriva dynamiken hos ett kvantmekaniskt system som banor i ett fasrum. I stället måste vi tänka på det som fördelningar som utvecklas i fasrummet. För ett kvantmekaniskt system som ”beter sig klassiskt” skulle vi erhålla en väldigt lokaliserad fördelning som följer motsvarande klassiska bana. Just detta är essensen av *Ehrenfests teorem* som kopplar samman tidsutvecklingen av kvantmekaniska förväntansvärden $\langle \phi | A | \phi \rangle$ med motsvarande klassiska tidsutveckling för någon storhet A .

Betyder linjäriteten hos kvantmekaniken, och observationen att ”närliggande” tillstånd förblir nära varandra, att kaos inte kan spela någon roll inom kvantmekanik? Om svaret är ja, får vi genast ett problem med en möjlig klassisk gräns. Denna synbara motsägelser, som Einstein identifierade för 100 år sen, gav upphov till en lavinartad forskningsaktivitet inom kvantkaos under den senare halvan av 1900-talet. En följd av denna kaosparadox är att vissa inte ens kallar fältet för kvantkaos, utan för *kvantkaologi*.

Som vi ska visa härnäst, betar sig kvantmekaniska system – även om deras utveckling alltid är linjär – ändå konceptuellt olika beroende på om motsvarande klassiska system är kaotiskt eller inte. Till att börja med skulle det vara bra att ha en definition av kaos för kvantmekaniska system. Uppenbarligen kan vi inte på ett direkt sätt översätta den klassiska definitionen. Den vanligaste definitionen man stöter på är i stället att en kvantmekanisk Hamiltonian är kaotisk om motsvarande klassiska Hamiltonian är kaotisk. Denna definition förutsätter dock att det finns en väldefinierad klassisk gräns, vilket inte alltid är fallet (exempelvis om systemet innefattar kvantmekaniskt spinn). Kan vi i stället använda integrerbarhet som definition? Klassiskt fungerar det eftersom icke-integrerbara modeller uppvisar kaos och vice versa. Men det visar sig knepigt att definiera integrerbarhet i kvantmekaniska modeller. Idag finns det faktiskt ingen fullständigt accepterad definition varken för kaos eller integrerbarhet hos kvantmodeller. Vi går här inte vidare in på detaljer i denna definitionsdiskussion, utan låt oss istället fokusera på vad som kännetecknar olika kvantsystem.

Huruvida den klassiska motsvarigheten till en kvantmekanisk Hamiltonian H är integrerbar eller ej tar sig uttryck både i H :s spektrum E_n och dess egentillstånd $|\phi_n\rangle$ (dvs. vilka energinivåer

som är tillåtna och de tillstånd dessa svarar mot). Givet att systemen är stora nog, visar det sig att Hamiltonianerna uppvisar ”universella” egenskaper, vilket betyder att de kan delas in i olika klasser. Liknande idéer återfinns i fysiken för fasövergångar där man finner att mikroskopiska detaljer inte är väsentliga för att beskriva naturen hos övergången – det räcker med att känna till systemets symmetrier och dimension (vilka båda typiskt är makroskopiska egenskaper). Men för att de universella särdragen ska bli tydliga behöver vi anta att antalet tillstånd $|\varphi_n\rangle$ inom ett litet energiintervall dE är stort. Detta ter sig logiskt om vi är ute efter att statistiskt beskriva spektrumet av tillåtna energier. Historiskt kan idén om sådana allmänna beteenden tillskrivas Eugene Wigner som föreslog att spektrumet för en komplicerad atomkärna kan representeras av en *slumpmatris* \mathbf{M} . Med ”slumpad” menas att elementen hos \mathbf{M} är slumpstal med någon given varians. Men det är viktigt att \mathbf{M} har samma symmetrier och dimension som H , till exempel måste \mathbf{M} vara hermitsk.

Givet \mathbf{M} så går det att visa att spektrumet har en speciell egenskap. För att formulera denna, låt $s_n = E_{n+1} - E_n$ beteckna energiskillnaden mellan två närliggande energiegenvärden. Då kan vi definiera en sannolikhetsfördelning $P(s)$ som säger hur stor sannolikheten är att energiskillnaden är s . Man finner att för en slumpmatris \mathbf{M} är fördelningen på så kallad *Wignerform*

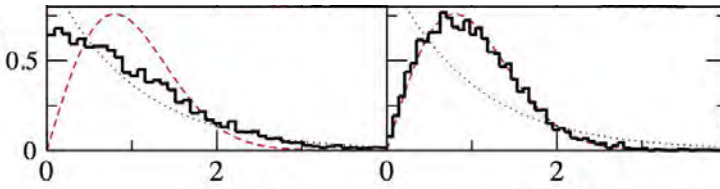
$$P(s) \propto s^\beta e^{-\alpha s^2}$$

där exponenterna enbart kan anta vissa värden: $\beta = 1, 2$ eller 4 beroende på symmetrierna, och motsvarande $\alpha = \pi/4, 4/\pi$ respektive $64/9\pi$. Proportionalitetskonstanten bestäms av att $P(s)$ ska vara normerad (dvs. $P(s)$ integrerad över alla värden på s ska vara lika med 1). Framförallt exponenten β bestämmer vilken form $P(s)$ har. Den viktiga observationen är att

$$\lim_{s \rightarrow 0} P(s) = 0$$

vilket säger att det är försvinnande liten sannolikhet att två energier sammanfaller. Denna egenskap, vilken visar sig vara karakteristisk för just kaotiska modeller, kallas för *energifrånstötning*. En direkt följd är att spektrumet inte uppvisar degenerationer oavsett vad systemparametrarna är.

Wigners observation var att spektrumet av \mathbf{M} och H hade samma egenskaper, och detta visade sig gälla mer allmänt: om



Figur 3: Numeriskt extraherad fördelning $P(s)$ (heldragen svart kurva) för den så kallade Dickemodellen. I det vänstra diagrammet är kopplingsparametern i modellen liten och vi förväntar oss inte kaos, medan kopplingsparametern i det högra diagrammet är stor, och vi borde se kaotiska egenskaper. Trenden är tydlig: till vänster är den heldragna kurvan lik den prickade kurvan vilken motsvarar en Poissonfördelning (icke-kaotisk); till höger sammanfaller kurvan väl med den streckade röda som representerar den förväntade Wignerfördelningen (kaotisk). Det numeriska resultatet är för ett ändligt system, och perfekt överensstämmelse fås enbart när man tar gränsen av ett oändligt stort system (vilket naturligtvis inte är möjligt numeriskt).

(Figur från Clive Emary och Tobias Brandes, *Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model*, Physical Review E **67** (2003): 066203 (DOI: 10.1103/PhysRevE.67.066203).)

man har en kaotisk modell så kommer motsvarande fördelning $P(s)$ vara på Wignerform. Ett exempel visas i figur 3, där de kaotiska egenskaperna hos modellen blir mer och mer tydliga när man ökar en viss parameter. I figurens högra diagram följer fördelningen mycket väl den analytiska formen (streckad röd kurva) för en Wignerfördelning.

Vad är då egenskaperna hos energispektrumet för modeller vars klassiska motsvarighet inte är kaotisk, dvs. integrerbar? Det typiska borde vara att energinivåerna ligger tätare ju större energin är, i likhet med vad som gäller klassiskt (då man har ett kontinuum av energier). Men det måste betyda att $P(0) \neq 0$, dvs. att vi inte har energifrånstötning. Detta är också exakt vad man finner. Mer specifikt får man att fördelningen blir på *Poissonform*

$$P(s) = e^{-s}$$

Ett resultat av sambandet mellan spektrumet för kaotiska modeller och slumpmatriser är att mycket av kvantkaos kan förstås genom att studera teorin för slumpmatriser. Vi har dock ännu inte sagt något om vad som karakteriserar egentillstånden för en kaotisk modell.

Allmänt finner man för kaotiska system att för höga energier blir motsvarande egentillstånd utsmetade över hela det tillgängliga fasrummet. Strukturen hos fördelningen ter sig kaotisk. Denna stora utbredning är motsvarigheten till den klassiska ergodisiteten. Det finns dock undantag bland egentillstånden: vissa av dem har en högst ojämn utbredning och klumpar i stället ihop sig runt bestämda banliknande kurvor. Det visar sig att dessa banor är rester av den underliggande klassiska modellen – de representerar nämligen klassiska periodiska lösningar som är instabila (dvs. så fort du avviker minsta lilla från banan försvinner du bort från den) och brukar kallas *kvantärr*. (Se vinjettbilden på sid 132.)

Vägar ut

Låt oss sammanfatta de svårigheter och problem vi hittills stött på.

1. Bohr-Sommerfeldkvantisering länkar samman klassisk mekanik med kvantmekanik för integrerbara system, men idén bryter samman för icke-integrerbara system.
2. Samma metod är relaterad till Heisenbergs osäkerhetsrelation, som för med sig att kvantmekaniska lösningar inte kan beskrivas som banor i fasrummet. I stället måste man representera dem som fördelningar med en utbredning.
3. Klassiskt kaos uppkommer från icke-linjära rörelseekvationer. Schrödingerekvationen, å andra sidan, är linjär och borde därmed inte kunna ge upphov till kaotiska beteenden.
4. På grund av linjäriteten, och därmed den unitära tidsutvecklingen, går det inte att definiera en Lyapunov-exponent för kvantmekaniska system på samma sätt som man kan göra för klassiska system.

Trots den uppenbara motsägelsen såg vi att kaos manifesteras även i kvantmekaniska system såväl i spektrumet som i energiegentillstånden. Strax ska vi även diskutera betydelsen av kaos i dynamiken hos kvantmekaniska system. Men innan dess ska vi se att man kan komma runt problemet med unitär tidsutveckling på ett naturligt sätt, och därmed också införa en Lyapunov-exponent, som ju spelar en så central roll i klassiskt kaos.

För att göra detta behöver vi införa ett nytt begrepp som vanligtvis inte presenteras i grundläggande kurser i kvantmekanik,

nämligen *täthetsmatriser* ρ . I sidorutan nedan beskrivs hur täthetsmatriser uppkommer när vi har att göra med system som kan delas in i mindre delsystem. I korthet: Så snart kvantkorrelationer, så kallad *sammanflätning*, förekommer mellan två delsystem så kan vi inte längre beskriva tillståndet för något av delsystemen som ett ket-tillstånd $|\psi\rangle$. I stället måste de enskilda delsystemen beskrivas med täthetsmatriser och en formalism för hur dessa måste hanteras framträder på ett naturligt sätt. Antag att vi har ett sådant system som består av flera delar och att vi enbart är intresserade av ett av dessa delsystem och specifikt dess tidsutveckling. Vi ska nu visa att ett sådant delsystem inte behöver utvecklas unitärt, vilket också visar sig lösa problemet med frånvaron av en Lyapunov-exponent.

Täthetsmatriser

Ett tillstånd $|\psi_A\rangle$ för en partikel A kan alltid uttryckas som en linjärkombination av tillstånd $|\varphi_n\rangle$ som utgör en fullständig bas:

$$|\psi_A\rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle$$

Om $\{|\varphi_n\rangle\}$ är en *ortonormal bas* (dvs. $\langle\varphi_n|\varphi_m\rangle = \delta_{nm}$ där δ_{nm} är *Kroneckers deltasymbol*) gäller att $\sum_n |a_n|^2 = 1$ svarar för normeringen av $|\psi_A\rangle$. På samma sätt för en partikel B kan vi skriva dess tillstånd

$$|\psi_B\rangle = \sum_m b_m |\phi_m\rangle$$

där nu $\{|\phi_m\rangle\}$ utgör en ortonormal bas för partikel B .

Låt oss nu betrakta det totala tillståndet för *båda* partiklarna. Det skriver vi som *direktprodukten*

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$$

En ortonormal bas för det kombinerade systemet $A+B$ är $\{|\varphi_n\rangle|\phi_m\rangle\}$, och därmed kan vi skriva ett helt allmänt tillstånd för det fulla systemet som

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |\varphi_n\rangle|\phi_m\rangle$$

Notera att ett sådant tillstånd inte behöver vara *separabelt*, dvs. det kan inte nödvändigtvis skrivas som en direktprodukt av ett tillstånd för delsystem A och ett tillstånd för delsystem B . När detta inte är möjligt säger man att partiklarna är *sammanflätade*.

Antag nu att vi enbart har tillgång till delsystem A i betydelsen att alla mätningar vi kan utföra är på detta delsystem. En naturlig fråga är då: Hur

ska vi beskriva A :s tillstånd så att det innehåller all information om de möjliga utfallen av sådana mätningar? Om de två delsystemen är sammanflätade duger inte ett rent tillstånd, dvs. ett på formen $|\psi_A\rangle$. För att besvara frågan, låt oss se på förväntansvärdet av en observabel O_A för delsystem A . Vi kan uttrycka detta så här:

$$\begin{aligned}\langle O_A \rangle &= \langle \psi | O_A | \psi \rangle \\ &= \sum_{ijnm} c_{ij}^* c_{nm} \langle \phi_i | \langle \varphi_j | O_A | \varphi_n \rangle | \phi_m \rangle \\ &= \sum_{ijnm} c_{ij}^* c_{nm} \langle \varphi_j | O_A | \varphi_n \rangle \langle \phi_i | \phi_m \rangle \\ &= \sum_{ijn} c_{ij}^* c_{ni} \langle \varphi_j | O_A | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_l \sum_{ijn} c_{ij}^* c_{ni} \langle \varphi_j | O_A | l \rangle \langle l | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_l \langle l | \rho_A O_A | l \rangle = \text{Tr}_A[\rho_A O_A]\end{aligned}$$

Här har vi, på sista raden i uträkningen, infört den *reducerade täthetsmatrisen* för delsystem A

$$\rho_A = \sum_{ijn} c_{ij}^* c_{ni} |\varphi_n\rangle \langle \varphi_j| = \text{Tr}_B[\rho]$$

och det *partiella spåret* över ett delsystem. Komplexkonjugatet betecknas med asterisk * och vi har använt

$$\sum_l |l\rangle \langle l| = 1$$

där summan är över en fullständig bas (här i delsystem A).

Vad uträkningen visar är att om vi är begränsade till mätningar enbart på delsystem A så kan vi använda den reducerade täthetsmatrisen

$$\rho_A = \text{Tr}_B[|\psi\rangle \langle \psi|]$$

för att beskriva A :s tillstånd. Man bildar således täthetsmatrisen för det fulla systemet, $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, och sen tar man spåret över delsystem B . Kvar blir en täthetsmatris som beskriver delsystem A .

När vi arbetar med sammansatta system uppstår således täthetsmatriserna på ett naturligt sätt. Och som redan nämnts, om den reducerade täthetsmatrisen inte beskriver ett rent tillstånd, betyder det att delsystemen är sammanflätade. I texten inför vi ett system kopplat till en omgivande reservoar, så där är det reservoaren som spelar rollen som delsystem B . Genom att ta spåret över reservoaren blir systemets tillstånd blandat och dess tidsutveckling kan inte längre beskrivas som unitär. Man leds att lösa ekvationer som Lindbladekvationen (se egen sidoruta) i stället för Schrödingerekvationen.

Om vi till att börja med antar att systemets tillstånd faktiskt kan beskrivas av ett ket-tillstånd $|\psi\rangle$ då säger vi att systemets täthetsmatris är $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, vilket kan ses som en matris. I termer av ρ antar Schrödingerekvationen formen

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = i[\rho(t), H] = i(\rho(t)H - H\rho(t))$$

Förväntansvärden av observabler fås från

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= \text{Tr}[\rho O] = \sum_n \langle \phi_n | \rho O | \phi_n \rangle = \sum_n \langle \phi_n | \psi \rangle \langle \psi | O | \phi_n \rangle = \\ &= \sum_n \langle \psi | O | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \psi \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle\end{aligned}$$

där vi definierat spåret (Tr) av en matris i andra likheten, och använt att summan över alla tillstånd i en fullständig bas är lika med 1:

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = 1$$

Förväntansvärdet av en operator O , definierat på detta sätt som spåret över täthetsmatrisen ρ multiplicerad med operatoren O , är alltså precis vad det borde vara för tillståndet $|\psi\rangle$. Samma sätt att uttrycka förväntansvärdet fungerar även för mer allmänna tillstånd (se sidorutan om täthetsmatriser).

I allmänhet gäller att ρ måste vara hermitsk, dvs. att $\rho = \rho^\dagger$, och att dess egenvärden måste vara icke-negativa. Det mest allmänna uttrycket för täthetsmatrisen är då

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

där $p_n \geq 0$ kan tolkas som sannolikheten att partikeln befinner sig i tillståndet $|\psi_n\rangle$. Med andra ord: ρ kan ses som en (klassisk) statistisk fördelning över tillstånden $|\psi_n\rangle$. Notera också att $\sum p_n = 1$. Om alla sannolikheter $p_n = 0$ utom en som är 1 återfår vi exemplet ovan och man säger då att tillståndet är *rent*. Om, å andra sidan, flera p_n är nollskilda är tillståndet *blandat*, vilket signalerar att systemet är sammanflätat med ett annat delsystem (se sidorutan).

Vad har nu allt detta att göra med kvantkaos? Alla mätningar eller observationer utförs på delsystem, inneslutna i större system som vi inte har kontroll över, och till största delen heller inte bryr oss om. Det finns nämligen alltid en omgivning – en *reservoar* –

som växelverkar med det system som intresserar oss och som påverkar det mer eller mindre. En naturlig fråga blir då vilken typ av rörelseekvation som skulle kunna beskriva systemets tidsutveckling på ett sätt så att vi inte behöver lösa det fulla problemet, även innefattande reservoaren (vilket inte skulle vara praktiskt möjligt). Eftersom systemet växelverkar med reservoaren, kommer systemet med nödvändighet också att bli sammanflätat med reservoarens frihetsgrader. Systemet kommer därmed, enligt ovan, att beskrivas av ett blandat tillstånd ρ . Så frågan blir vad man kan säga om tidsutvecklingen hos sådana allmänna täthetsmatriser.

För att kunna besvara frågan för system kopplade till en reservoar måste vi förlita oss på en del approximationer, som att kopplingen mellan systemet och reservoaren är svag och att reservoaren är stor i förhållande till systemet. Göran Lindblad, hemmavarandes på Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm, var en pionjär inom detta område och skrev ner den mest allmänna formen för en sådan tidsutvecklingsekvation, se sidorutan om Lindbladekvationen. Den för oss centrala slutsatsen är att, i och med kopplingen till reservoaren, utvecklas inte systemet unitärt. Därmed behöver inte avståndet mellan två tillstånd, som diskuterades ovan, förbli oförändrat i tiden.

Så vi har blivit av med problemet med unitär tidsutveckling. Men hur finner vi en Lyapunov-exponent? Wojciech Zurek, en av nutidens mest kända kvantfysiker, poängterar återkommande vikten av att ta hänsyn till systemets omgivning, för att förstå den klassiska gränsen. För blandade tillstånd kan man, liksom för rena tillstånd, definiera ett avståndsmått, och om vi har att systemets två initialtillstånd $\rho_0(t)$ och $\rho_\varepsilon(t)$ utvecklas enligt Lindbladekvationen (se sidorutan på nästa sida) finner man

$$D(\rho_0(t), \rho_\varepsilon(t)) = \varepsilon e^{\lambda t}$$

givet att Hamiltonianen är kaotisk. Vidare, om Hamiltonianen har en klassisk kaotisk motsvarighet är exponenten λ densamma som den klassiska Lyapunov-exponenten. Vi kan alltså återfå en av de mest karakteristiska egenskaperna för klassiskt kaos – den exponentiella känsligheten för små störningar i initialtillstånden – även i kvantsystem. Poängen är att den lokala tidsutvecklingen av ett system inte behöver vara unitär, och som följd av detta kan det lokalt uppstå kaotiska beteenden.

Asher Peres visade ett alternativt sätt att införa en Lya-

Lindblad-ekvationen

Antag att vi studerar ett system som är nästan helt isolerat, men fortfarande med en liten koppling till omgivningen. Det betyder att systemet och omgivningen kommer att bli sammanflätade allt efter som tiden fortlöper – vi kan säga att information om systemets tillstånd ”läcker ut” i omgivningen. Sammanflätningen innebär alltså att vi inte har tillgång till fullständig information om systemet, vilket innebär att vi måste beskriva det med en täthetsmatris. Vi söker en ekvation som beskriver hur systemets täthetsmatris utvecklas i tiden, för att på så sätt kunna undvika att lösa det mer komplicerade fulla problemet innefattande systemet plus omgivningen.

Göran Lindblad skrev ner den mest allmänna ekvation som ger systemets tidsutveckling, och som samtidigt bevarar de fysikaliska egenskaper som systemets täthetsmatris måste uppfylla. Denna så kallade Lindblad-ekvation har formen

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = i[\rho(t), H] + \sum_j \kappa_j \left(2L_j \rho L_j^\dagger - L_j^\dagger L_j \rho - \rho L_j^\dagger L_j \right)$$

Den första termen på högersidan motsvarar den vanliga Schrödinger-ekvationen, medan de andra termerna härrör från kopplingen till omgivningen, där L_j är så kallade Lindbladoperatorer. Om kopplingarna $\kappa_j = 0$ återfår vi den vanliga Schrödinger-ekvationen och den unitära tidsutvecklingen, men med $\kappa_j \neq 0$ är inte längre tidsutvecklingen unitär. Den totala tidsutvecklingen för system + omgivning är förstås unitär, men det betyder alltså inte att tidsutvecklingen för enbart systemet blir det.

punov-exponent i kaotiska kvantsystem, ett som inte förlitar sig på icke-unitär tidsutveckling. Om vi istället för att störa initialtillståndet stör Hamiltonianen, och undersöker fideliteten mellan ett tillstånd som utvecklats med den ostörda Hamiltonianen H_0 och samma tillstånd när det i stället utvecklas med den störda Hamiltonian H_e , erhåller man också ett exponentiellt beteende med motsvarande klassiska Lyapunov-exponent. Detta är i någon mening enklare än Zureks införande av en påverkande omgivning, men Zureks metod ger en klarare fysikalisk bild av hur icke-unitär tidsutveckling kan uppstå.

Moderna frågor kring kvantkaos

Med upptäckten av lasern på 60-talet utvecklades atomfysiken enormt, från spektroskopi till laserkyllning av atomer – en metod med vilken man bland annat lyckats skapa så kallade *Bose-Einstein-*

kondensat. De senaste 10 åren har man även använt laserkyllning för att realisera kvantmekaniska system bestående av 1000-tals atomer som växelverkar med varandra på ett mycket kontrollerat vis. Mångpartikelsystem är inte bara extremt svåra att simulera numeriskt, de betar sig även ofta kvalitativt annorlunda jämfört med enpartikelsystem. Skälet till att man tidigare inte har studerat dynamiken för mångpartikelsystem i någon större utsträckning är helt enkelt att man experimentellt inte har kunnat realisera dem. I och med att situationen idag är annorlunda har man nu börjat intressera sig i frågor som dessa:

1. Hur utvecklas ett allmänt kvantmekaniskt mångpartikeltillstånd i tiden?
2. Kommer ett allmänt tillstånd *termaliseras* i enlighet med statistisk mekanik? Hur uppstår en makroskopisk storhet som temperatur i en mikroskopisk kvantbeskrivning?
3. Hur påverkas ett växelverkande systems tidsutveckling av orenheter? För ett icke-växelverkande system vet man väl vad som sker, men kan vi vänta oss liknande fenomen i mångpartikelsystem?

Låt oss i korthet diskutera frågan om termalisering. I statistisk mekanik förekommer flera olika fördelningar som beskriver hur olika energinivåer populeras: *Bose-Einstein*, *Fermi-Dirac*, *termisk*, *mikrokanonisk*, o.s.v. För sådana termiska fördelningar bestäms populationen hos de olika energinivåerna av ett fåtal makroskopiska storheter, som t.ex. temperatur. Hur ska vi uttrycka motsvarande kvantmekaniska tillstånd? Det enda vi känner till är sannolikheterna p_n för att populera de olika energitillstånden. Vi vet alltså inte sannolikhetsamplituderna, och blir därför tvungna att arbeta med täthetsmatriser. Typen av fördelning bestämmer sannolikheterna p_n , och med enbart kännedom om p_n måste systemets tillstånd vara blandat. Vi stöter på ett uppenbart problem: om vårt mångpartikelsystem är slutet, och vi startar i ett rent tillstånd $|\psi\rangle$, då medför den unitära tidsutvecklingen att tillståndet måste förbli rent för alla tider. Men detta kan inte vara ett termiskt tillstånd som är i högsta grad blandat! Betyder det att kvantmekanik är i konflikt med statistisk mekanik, och speciellt med den andra termodynamiska lagen, enligt vilken ett system måste termaliseras efter tillräckligt lång tid?

Om vi tittar på termometern utanför vårt fönster när vi kliver

upp på morgonen och ser att det är 12 grader ute, så betyder detta naturligtvis att luften i en liten omgivning runt termometern är 12 grader (upp till möjliga fel) och inte att det är 12 grader överallt. Termometern gör en *lokal mätning* av temperaturen. Detta gäller allmänt: mätningar är i regel lokala. Den relevanta frågan blir således om det lokala tillståndet ρ_{lok} är termiskt, inte om det totala tillståndet ρ är det (vilket det normalt inte kan vara enligt argumentet ovan). Vad man allmänt finner är detta:

- Om 1. Hamiltonianen är kaotisk,
 2. antalet partiklar är mycket stort, och
 3. vi tar ett godtyckligt energiegentillstånd $|\varphi_n\rangle$ (en bit upp i spektrumet) med motsvarande täthetsmatris $\rho_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$,

så följer att alla lokala täthetsmatriser ρ_{lok} är termiska. Denna observation har kommit att kallas *egentillståndens termaliseringshypotes*. Slutsatsen är att termalisering är något som även sker på ett mikroskopiskt plan, och detta på nivån av egentillstånd och inte på grund av exempelvis någon komplicerad linjärkombination av olika egentillstånd. En annan slutsats som följer ur detta är att egentillstånden för en kaotisk Hamiltonian innebär maximal sammanflätning av systemets lokala delar, så länge systemet är tillräckligt exciterat (motsvarande gäller alltså inte för grundtillståndet och de lågenergetiska tillstånden). Sådana tillstånd är också exempel på ergodiska tillstånd, dvs. de är utspridda över hela det tillgängliga fasrummet.

Egentillståndens termaliseringshypotes har testats numeriskt i ett flertal olika modeller, med goda resultat. Men även om hypotesen verkar gälla så är vi fortfarande långt från en fullständig förståelse av hur kvantmekanisk termalisering sker, och hur kvantmekanik och statistisk mekanik hänger ihop. Flera frågor kvarstår, som exempelvis vad som händer på vägen till termaliseringen – vad bestämmer till exempel den relevanta tidsskalan? Man har också sett att "orenheter" i vissa fall kan förhindra termalisering, något som kallas *mångpartikellokalisering*. Även om man under det senaste årtiondet fått en djupare förståelse av detta fenomen är bilden fortfarande långt ifrån komplett.

Idag har man framgångsrikt utfört flera experiment som studerar tidsutvecklingen hos kaotiska mångpartikelsystem. Speciellt intressant är att man har stor kontroll över systemets parametrar

och hur det är kopplat till omgivningen. På sikt är förhoppningen att experimenten ska bli så pass kontrollerbara att de kan ersätta numeriska simuleringar som görs på datorer. Situationen är alltså den, att vi har ett kvantmekaniskt problem som vi vill lösa, men det är för komplicerat för att simuleras på en dator. Så i stället konstruerar vi ett experiment som löser det åt oss – vi bygger en *kvantsimulator*! Även om de första kvantsimulatorerna faktiskt redan finns så ligger en spännande tid framför oss. Vi kan förvänta oss fler kvantsimulatorer som kommer fördjupa vår förståelse av kaos, den klassiska gränsen och tillhörande fenomen. ❖

För vidare läsning

M. C. Gutzwiller, *Quantum Chaos*, Scientific American **266**, 78 (1992) (DOI: 10.1038/scientificamerican0192-78).

A. D. Stone, *Einstein's Unknown Insight and the Problem of Quantizing Chaos*, Phys. Today **58**, 37 (2005) (DOI: 10.1063/1.2062917).