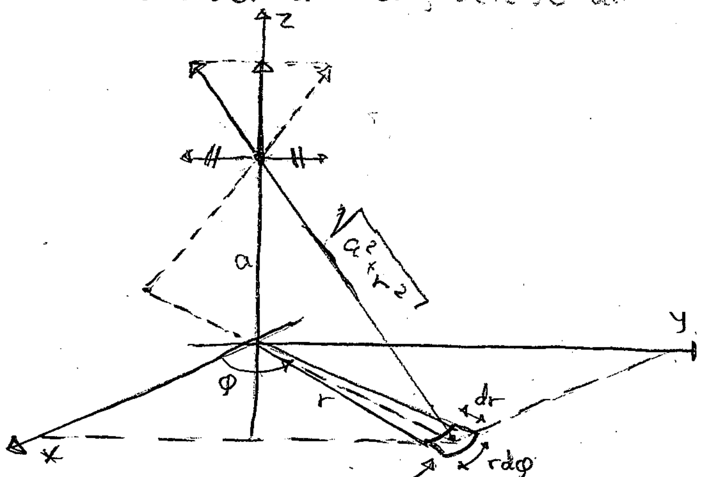
E1. Eftersom planet är ∞ kan man vänta sig att kraften på punktladdningen blir lika stor, oavsett dess avstånd från planet. Låt oss visa detta genom att anta att avståndet är a, och se att a ej finns med i slutresultatet.



Betrakta ett ytelement i planet enl. figur. $\sigma > 0$ ger repulsiv kraft på punktladdningen enligt Coulombs lag.
För varje sådant ytelement finns ett likadant, på motsatt sida origo, som också ger en snett uppåtriktad kraft på punktladdningen. Men x- och y-komp. av dessa krafter tar ut varandra, så vi får bara en kraft i z-riktningen, totalt sett.

ytelement med area $\underline{dA = (rd\varphi)(dr)}$ och laddning $dq = \sigma dA$ $= \underline{\sigma r d\varphi dr}$

- Total kraft från ytelementet med laddn. dq på punktladdn.

$$\frac{q\,dq}{4\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)} = \frac{q\sigma r\,d\varphi\,dr}{4\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)}$$

Den relevanta delen av denna kraft är som sagt z-komp., dvs en andel $\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$ av den totala kraften, så

- totalt kraftbidrag i z-led: $\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\frac{q\sigma r\,d\varphi\,dr}{4\pi\varepsilon_0(a^2+r^2)} = \frac{a\sigma q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,dr\,d\varphi}{(a^2+r^2)^{3/2}}$
- Total kraft på q blir därför

$$F = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{qa\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,dr\,d\varphi}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{qa\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^{3/2}}\underbrace{\int_0^{2\pi}1\,d\varphi}_{2\pi} =$$

$$= \frac{qa\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^{\infty}\frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \frac{qa\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]_0^{\infty} = \frac{qa\sigma}{2\varepsilon_0}\left(0-\left(-\frac{1}{a}\right)\right) = \boxed{\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Kraften är alltså oberoende av a, och riktad i z-riktningen. Tecknet på $\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$ bestämmer om F pekar i pos. eller neg. z-riktning.

Att fältstyrkan E från ett oändligt plan med ytladdning σ är

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

är definitivt värt att komma ihåg!