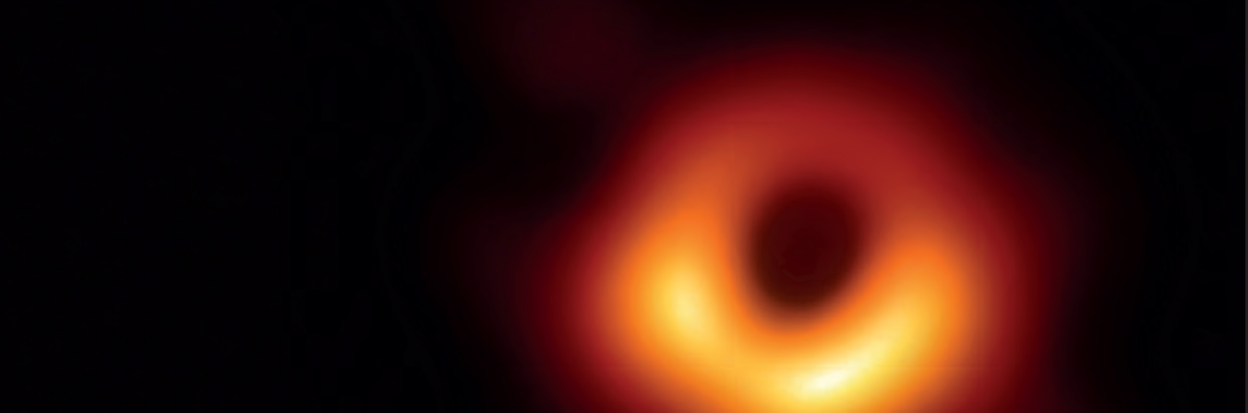


Marcus Berg

är professor i fysik vid Karlstads universitet. Hans handledare under forskarutbildingen vid *University of Texas* var Cécile DeWitt. Hon och hennes man fysikern Bryce DeWitt diskuterade kvantfysik, svarta hål och detektorer vid middagsbordet – ämnen som ännu ligger honom varmt om hjärtat. Marcus har tidigare arbetat som forskare i Kalifornien, Rom, Berlin, Paris och Stockholm.

En av de största utmaningarna inom modern fysik är att förena kvantfysik med Einsteins allmänna relativitetsteori – den förstnämnda relevant på de allra minsta skalorna, den senare på de allra största. Båda teorierna behövs i beskrivningen av svarta hål, men kombinationen av dem ger upphov till svårlösta paradoxer. Marcus Berg guidar oss bland märkliga kvantsamband, entropi och horisonter, i jakt efter en framtida teori för kvantgravitation.

Bilden: Det svarta hålet i centrum av galax M87. (Event Horizon Telescope Collaboration)

Informationen bortom horisonten

Det är midsommar i Västerbotten. Från berget där vi slagit upp vårt tält njuter vi i fulla drag av solnedgången över Tavelsjön. Men åtskilliga strimmor ljus kämpar sig alltjämt över horisonten. Gick solen ned eller inte?

Horisonten är den linje där himmel och jord möts. Det är ingen plats på jorden, för horisonten flyttar sig när man reser. Men i perspektivritning är horisonten verkligen en linje. Tar vi kort med kamera så försvinner en styvmorsviol som är mindre än en pixel på kortet ur kamerans bild av världen. Vi betvivlar inte att styvmorsviolen finns, men det finns inget sätt att uttyda den ur kortet, inte ens med världens bästa datoralgoritmer. Man skulle kunna säga att vi *förlorat information* jämfört med om kameran hade haft högre upplösning, dvs. ännu mindre pixlar.

Det första kortet av ett svart hål offentliggjordes i april 2019 (se bilden till vänster: det som syns är egentligen ansamlingsskivan, bestående av het materia på väg att falla in i det svarta hålet). Idag finns hundratals mer eller mindre fastställda kandidater till svarta hål i världsrymden. Det närmaste ligger i riktning av stjärnbilden Enhörningen, drygt tre tusen ljusår bort. I samband med Stephen Hawkings begravning 2018 skickades ett meddelande ut i rymden mot just det svarta hålet. Men det tar alltså drygt tre tusen år för informationen att nå fram.

Mörka stjärnor och ett mysterium

Svarta hål beskrivs ibland som mörka stjärnor.[1] ”Mörka”, eftersom flykthastigheten, dvs. den fart som skulle krävas vid stjärnans yta för att komma bort från stjärnan, är större än ljushastigheten c. Uttrycket för flykthastigheten för en stjärna med massa M och radie r kan man enkelt få fram ur Newtons gravitationsteori:

1 Exempelvis i boken Ergo Fysik 2, som ofta används på gymnasiets fysikkurs.

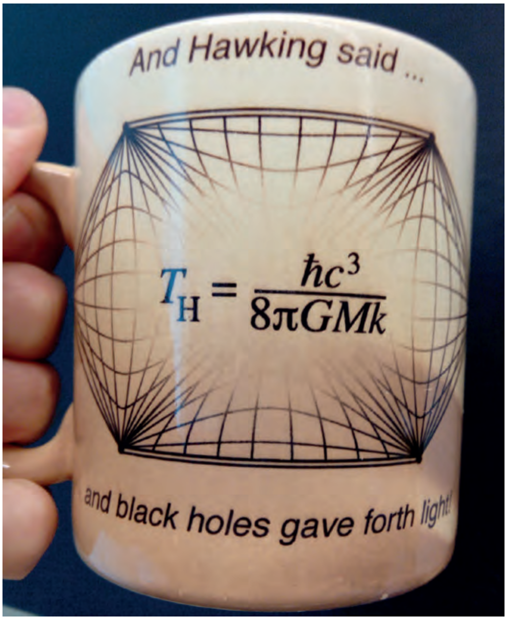
$v^2 = 2GM / r$. Om man sätter flykthastigheten lika med ljusets hastighet, $v = c$, och löser ut radien, erhåller man ett uttryck för radien hos den mörka stjärnan:

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

Om M exempelvis är solens massa blir r ungefär 3 km.

Detta är en bra början på en beskrivning av vad ett svart hål är, men för att det ska bli korrekt måste man ta till Einsteins gravitationsteori – den allmänna relativitetsteorin. En viktig skillnad är att man inte kan ta sig ut ur ett svart hål oavsett hur man accelererar; beskrivningen med flykthastighet ovan säger bara huruvida man kan ta sig bort om man slutar accelerera genast efter uppskjutningsögonblicket. Själva uttrycket för radien visar sig ändå vara korrekt; radien hos ett svart hål är proportionell mot dess massa M. Det är vid den radien som den så kallade *händelsehorisonten* ligger. Den är inte något ”membran” eller någon fysisk yta. Det är mer dramatiskt än så: det är radien innanför vilken en person som fallit in aldrig mer kan kommunicera med världen utanför. När ytterligare massa faller in genom händelsehorisonten, växer det svarta hålet, för radien ökar enligt formeln ovan. Ett svart hål är som en glupsk jätte långt ute i världsrymden.

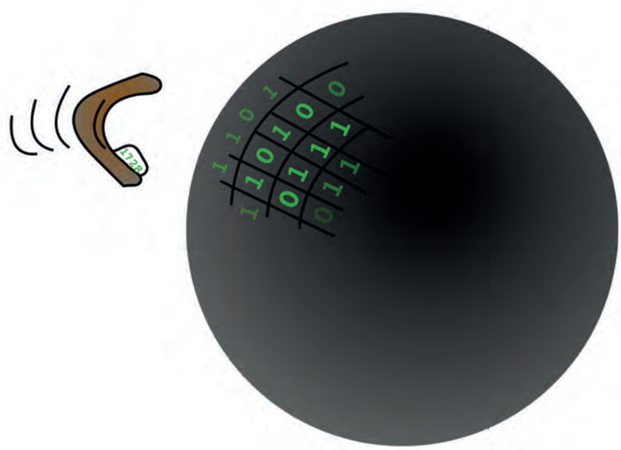
Hawkings stora teoretiska framsteg för snart 50 år sedan var uträkningen av det som idag kallas Hawkingstrålning. Genom att tillämpa kvantfysik upptäckte han att svarta hål trots allt inte är riktigt svarta. Ett svart hål måste stråla ut energi på samma sätt som en svart



Figur 1: Jag var på Hawkings 60-årskalas och fick den här fina kaffekoppen. Den var helsvart tills man hällde i varmt kaffe, då trädde formeln fram. Tyvärr råkade den hamna i diskmaskinen, så nu är den alltid vit.

kropp vid en viss temperatur T_H, dvs. enligt Plancks strålningslag. Formeln för den så kallade Hawkingtemperaturen T_H uttryckt i massan M och naturkonstanter kan avnjutas på min kaffekopp i figur 1.

Boltzmanns konstant k_B betecknas rätt och slätt k på koppen. Temperatur i kelvin (K) definieras i nya SI-systemet utifrån enheten joule (J), och byte mellan J och K ges av det nya *exakta* värdet $k_B = 1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ J/K. Hawkingstrålningen för bort ett visst antal joule per sekund från det svarta hålet. Enligt ekvivalensen mellan massa och energi minskar därför det svarta hålets massa, och därmed även dess radie. Man säger att det svarta hålet *dunstar*.[2]



Figur 2: Brian Greene kastar in sin plånbok i ett svart hål. Sfäriskt symmetriska svarta hål karaktäriseras enbart av sin massa M. Så vad händer med informationen som finns lagrad i bankkortschipet?

Med sin strålning skapade Hawking ett av de djupaste mysterierna inom teoretisk fysik: informationsparadoxen. Brian Greene beskriver den väl i sin NBC-dokumentär *Fabric of the Cosmos*. Greene låter något oklokt sitt bankkort falla ned i ett svart hål, som i figur 2. Bankkortet har viktig bankinformation, binärt ko-

2 Ibland påstås att det svarta hålet dunstar bort helt och hållet. Men för att beskriva det i detalj skulle man behöva en fullfjädrad teori för kvantgravitation, något som ingen ännu lyckats formulera. I den här texten räcker det att anta att dunstande svarta hål minskar i storlek åtminstone fram tills halva har dunstat bort.

dad i nollor och ettor (s.k. ”bitar”). Men om Hawkingstrålning är som svartkroppsstrålning, alltså jämnt fördelad över fotoner som en informationslös ström av energi – vart tog kontoinformationen vägen?

Man kan invända att det här inte verkar konstigare än om man slängt bankkortet i en väl försluten soptunna. Men innehållet i soptunnan kan fortfarande påverka resten av världen. Vi kan tänka oss en IT-skurk som bygger en scanner som genom soptunnans väggar bit för bit läser av all kontoinformation. Men även om chipet bara fallit en liten bit innanför händelsehorisonten kan vi enligt relativitetsteori aldrig få ut informationen, ens med det mest fantasifulla tankeexperiment. I klassisk fysik är det bara så det är: några nollor och ettor försvann spårlöst in i det svarta hålet. Information gick förlorad – men vad är problemet med det?

Den verkliga paradoxen inträder om vi tänker oss datorchipet som ett modern kvantdatorchip. För det första är ett centralt inslag i kvantmekaniken att information aldrig kan förstöras. För det andra hänger kvant-nollorna och kvant-ettorna (”kvantbitarna”) i datorchipet ihop med den särskilda typ av samband som finns i kvantfysik, och som jag ska beskriva mer utförligt nedan. Säg nu att vi klipper isär kvant-bankkortet för att värja oss för IT-skurkar, och låter ena halvan falla in i det svarta hålet. Relativitetsteori tycks nu utesluta samband mellan en kvantbit innanför händelsehorisonten och en kvantbit utanför. Men enligt kvantfysik försvinner inte kvant-sambanden bara för att den ena delen fallit innanför horisonten. I och med att det svarta hålet dunstar av Hawkingstrålning blir det mindre, och kan lagra allt mindre information. Hur kan det bräckliga kvantsambandet överleva denna process? Hur kommer kvantinformationen helskinnad ut igen? En lösning vore om information på något sätt ”kodas” vid händelsehorisonten, som om nollorna och ettorna i figur 2 innehåller all kvant-kontoinformation från alla tidigare kvant-bankkort som oförsiktiga ägare har tappat in i det svarta hålet.

Tankeexperimentet har målat in oss i ett kusligt litet hörn där relativitetsteori och kvantfysik tycks säga emot varandra. Finns det samband mellan innanför och utanför händelsehorisonten, eller inte? Vi kan också formulera det hela som ett fysikaliskt mysterium: Hur lagras kvantinformation i ett svart hål?

Kvantiserad gravitation?

Låt oss ta ett steg tillbaka och sammanfatta vad dagens teorier egentligen säger om svarta hål och deras egenskaper att lagra information. Om vi först bortser från att världen faktiskt beskrivs av kvantfysik kan vi använda den klassiska allmänna relativitetsteorin och lösa Einsteins ekvationer för gravitationsfältet. Ur det perspektivet hör svarta hål till de allra enklaste objekten i universum: den matematiska lösning som beskriver ett sfäriskt symmetriskt svart hål i vakuum är entydigt bestämd av massan M. Här finns inget utrymme för ytterligare information.

Men världen är kvantfysisk. I klassisk fysik må svarta hål beskrivas perfekt av Einsteins gravitationsteori, men idag finns ingen kvantfysisk version av den teorin. Att lyckas formulera en sådan är en av fysikens största utmaningar. Det råder ingen brist på försök. Det kanske mest kända ramverket kallas *strängteori*, som nu funnits i runt 50 år. Jag ska återkomma till dagens forskningsläge i slutet av artikeln, men låt mig redan nu antyda hur en kvantgravitationsteori skulle kunna lösa informationsparadoxen.

En av de kännetecknande egenskaperna hos kvantteorin för elektromagnetisk strålning (*kvantelektromagnetism*) är att det finns en *minsta möjliga mängd ljus* vid frekvens f: en foton med energi hf. Alla som har studerat spektrallinjer från en upphettad gas vet att den här kvant-kornigheten verkligen finns. De senaste åren har fysiker uppmätt gravitationsstrålning från kolliderande svarta hål, något som belönades med Nobelpriset i fysik 2017. Om kvantgravitation fungerar på liknande sätt som kvantelektromagnetism borde det även finnas *gravitoner* – gravitationens motsvarighet till elektromagnetismens fotoner. I Hawkings sista forskningsartikel, från 2018, föreslår han att gravitoner skulle kunna utgöra en stor ”hemlig gömma” för information i svarta hål.

Entropi som mått på överraskning

När jag först hörde talas om informationsparadoxen tyckte jag hela frågeställningen lät vag och luddig. Först efter flera års fysikstudier på universitetet insåg jag att information spelar en central roll i fysik, i form av sannolikhet. Sannolikhet låter också lite vagt när man först stöter på det. Men om vi efter många experiment mäter ett visst utfall, till exempel att den radioaktiva nukliden jod-131 – som används i behandling av sköldkörtelcancer – skickar ut elektroner med hög energi i 89% av alla sönderfall, då är det

89% chans att det händer. Det är den teoretiska fysikerns uppgift att räkna ut en siffra som 89% från grundprinciper. För sjukhusfysikern är mätning av antalet sådana elektroner något konkret och handgripligt – inte vagt och luddigt, utan en fråga om liv och död.

För att återgå till information är det alltså relaterat till sannolikhet. Det begrepp som förenar information och sannolikhet är *entropi*. Tag ett system som kan befinna sig i olika tillstånd med kända energier E_i som vi numrerar med $i = 1, 2, 3, \ldots$. Systemet är i termisk jämvikt med en värmereservoar vid temperatur T, vilket gör att systemets energi kommer att fluktuera. Sannolikheten för att systemet befinner sig i tillstånd nummer i med energi E_i betecknar vi p_i. Systemets entropi är då

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

Entropi mäts alltså i J/K, enheten hos naturkonstanten k_B. Men S bestäms helt av sannolikheterna p_i, som är enhetslösa.

Kombinationen $-\ln p_i$ kallas ibland ”överraskningen” för tillstånd i. Notera att överraskningen alltid är positiv, eftersom p_i inte kan vara större än ett. Därför är varje term i entropin S ovan positiv, trots minustecknet. Är sannolikheten att något inträffar 100% så blir vi noll överraskade när det händer, medan om sannolikheten p_i är mycket liten så blir vi desto mer överraskade om vi träffar på tillstånd i. Summan av alla utfall viktade med sina sannolikheter ger ett medelvärde. S/k_B är alltså medelvärdet av överraskningen! Det är relevant i den del av datavetenskap som kallas informationsteori, där man försöker sätta en siffra på hur mycket ny information man får från ett givet meddelande. Antalet bitar information i ett meddelande med längd N och entropi S är $N \cdot S$: större överraskning i ett visst meddelande innebär större informationsinnehåll när man väl mottar det.

Hur räknar man ut sannolikheterna p_i? Sannolikhetslära grundar sig på kombinatorik: att räkna ut antalet sätt som något kan hända på. Slår man två sexsidiga tärningar finns det $6 \cdot 6 = 36$ möjliga kombinationer av utfall, men bara ett sätt att få två ettor (*snake eyes*, som det kallas i hasardspel), så det har sannolikhet 1/36. I klassisk fysik kunde svagt ljus ha vilken bråkdel som helst av energin hf, t.ex. $hf / 3$, en tredjedel av energin vi kallar en foton. Men ljus har ingen mindre byggsten än en foton, så vi behöver inte räkna tredjedels fotoner. Utan naturens kvant-kornighet vore det alltså i en viss bemärkelse svårare att räkna ut antal möjliga energier, och därmed att räkna ut entropin. Se sidorutan nedan för exempel på hur man räknar ut entropin i ett par enkla fall.

Utöver energin kan man specificera tillstånd hos ljus med vilken axel den elektromagnetiska strålningen oscillerar utefter, alltså ljusets polarisation. Man kan som bekant filtrera ut en viss polarisation med ett polarisationsfilter. Vi kan prata om ljus polariserat i x-riktning, z-riktning, eller i någon vinkel mellan de två. Om vi istället för fotoner tar elektroner så har även de två tillstånd av ”polarisation”, som kallas spinn upp och spinn ned. Elektronspinnet leder till magnetism i exempelvis kylskåpsmagneter. Ett tredje exempel där vi kan räkna tillstånd är supraledande så kallade *Josephson-övergångar.* Under vissa förutsättningar kan även sådana supraledare ge upphov till två tillstånd. Dessa och andra kvantmekaniska två-tillståndsystem kallas ofta för *kvantbitar*, och de kan alla behandlas på liknande sätt, oavsett om de är fotoner, elektroner, eller supraledare. Precis som de klassiska bitarna kan vi beteckna de två tillstånden i en kvantbit för 0 eller 1, men vi ska strax se att kvantbitarna skiljer sig väsentligt från sina klassiska motsvarigheter.

Räkneexempel på entropi

Låt oss betrakta två elektroner i ett fast material, som befinner sig i ett magnetfält. Låt oss kalla magnetfältets riktning för ”uppåt”. Med avseende på denna riktning finns då fyra tillstånd hos de två elektronspinnen: De kan båda vara upp (00), åt olika håll (01 eller 10) eller båda ned (11). Eftersom energin är lägre när elektronens spinn pekar längs magnetfältets riktning (dvs. uppåt) kommer sannolikheten för spinn upp vara större än för spinn ned. Exakt hur mycket större beror på förhållandet mellan den magnetiska energin och den tillgängliga termiska energin.

Exempel 1: 70% att peka uppåt, 30% att peka nedåt vid en viss temperatur. Då blir sannolikheterna 49% för 00, 21% för både 01 och 10, och 9% för 11.

Exempel 2: Ökar vi temperaturen blir energin associerad med magnetfältet försumbar jämfört med termiska energin, då närmar sig sannolikheterna 50% för 0 och 50% för 1, som ger 25% för vart och ett av de fyra kombinerade tillstånden 00, 01, 10 och 11.

Vad blir då entropin i dessa fall? För exempel 1 får vi

$$S = k_\mathrm{B}(-0{,}49 \ln 0{,}49 + 2 \cdot (-0{,}21 \ln 0{,}21) - 0{,}09 \ln 0{,}09) = 1{,}22 k_\mathrm{B}$$

Notera att vi hade fått samma svar om vi bara tagit dubbla entropin för ett spinn:

$$S = 2 \cdot k_\mathrm{B}(-0{,}7 \ln 0{,}7 - 0{,}3 \ln 0{,}3) = 1{,}22 k_\mathrm{B}$$

I exempel 2 får vi

$$S = k_\mathrm{B}(-0{,}25 \ln 0{,}25 - 0{,}25 \ln 0{,}25 - 0{,}25 \ln 0{,}25 - 0{,}25 \ln 0{,}25) = 1{,}39 k_\mathrm{B}$$

vilket återigen ger samma svar som dubbla entropin för ett spinn:

$$S = 2 \cdot k_\mathrm{B}(-0{,}5 \ln 0{,}5 - 0{,}5 \ln 0{,}5) = 1{,}39 k_\mathrm{B}$$

Förutsatt att spinnen är oberoende av varandra, kan vi bara addera ihop deras entropier. Det är en approximation eftersom de egentligen påverkar varandra med magnetiska krafter. Men det är uppenbart att entropin hos *flera* spinn i alla fall aldrig kan bli *lägre* än entropin för *ett* spinn, eftersom ingen enskild term i summan kan vara negativ. Nedan kommer vi se att man skall vara försiktig med ord som ”uppenbart” när det gäller kvantfysik.

Låt oss nu dra till ordentligt och istället för två spinn ta en mol spinn, alltså Avogadros tal $N_A \approx 6{,}022 \cdot 10^{23}$ stycken spinn. Proportionalitetskonstanten för entropin blir då $N_A k_B$, som är definitionen av allmänna gaskonstanten *R,* dvs. 8,31 J/K per mol. Entropierna blir då 5,08 J/K i exempel 1 och 5,76 J/K i exempel 2.

Det visar sig att exempel 2, där temperaturen är hög, faktiskt har maximal entropi: ingen sannolikhet för tillståndet 0 kan ge en entropi som är större än 5,76 J/K. (Försök visa detta!) I allmänhet gäller att tillståndet med maximal entropi är det då alla sannolikheterna är lika stora.

Om vi tar fem elektronspinn har vi $2^5 = 32$ kombinationer, och vi kan tänka oss dem som ”tecken”: upp-upp-upp-upp-upp = 00000 = a, 00001 = b, 00010 = c osv. Med 29 bokstäver i svenska alfabetet blir det tre kombinationer över för emojis. Alla meddelanden kan på så sätt alltid reduceras till sekvenser av nollor och ettor.

Vad är en kvantbit?

Kvantbitar använder sig av mer fundamentala egenskaper hos materia än de som utnyttjas i klassiska datorchip. Kvantfysikens vågpartikel-dualitet säger att elektroner har vissa egenskaper gemensamma med vågor: en fri elektron med rörelsemängd p beskrivs som en våg med våglängd $\lambda = h / p$. En direkt följd av detta är Heisenbergs obestämdhetsrelation: om en elektrons läge är $x \pm \Delta x$ och dess rörelsemängd $p \pm \Delta p$ så blir obestämdheterna omvänt proportionella om de är mycket små: $\Delta x \, \Delta p > h /(4\pi)$. Motsvarande påstående i den klassiska vågfysiken är att man behöver kombinera vågor med flera olika våglängder för att bygga upp ett vågpaket. Ju mer lokaliserat vågpaket, desto större måste spridningen i våglängd vara. Sinusvågen är ett extremfall där våglängden är exakt bestämd (motsvarande exakt bestämd rörelsemängd i det kvantmekaniska fallet, dvs. Δp är noll) men där vågen sträcker sig över hela x-axeln (Δx är oändligt). Riktiga vågor är aldrig så extrema, utan är uppbyggda av ett intervall av våglängder, och kan därför vara ändliga i sin utsträckning. Så även elektronvågor. För stora klassiska partiklar, som bollar, är obestämdheterna Δx, Δp försumbara jämfört med värdena x, p själva.

För kvantspinn gäller en extrem variant av Heisenbergs obestämdhetsrelation. Obestämdheterna hos spinnet i olika riktningar som upp/ned (z-led) respektive höger/vänster (x-led) står i liknande relation till varandra som Δx respektive Δp. Men obestämdheten Δs_z i ett elektronspinn är inte försumbar jämfört med elektronspinnet s_z självt. Bägge är pyttesmå, som Plancks konstant $h/(2\pi)$ – notera att h har samma enhet som rörelsemängdsmoment (spinn). Om vi har spinn upp vet vi alltså inte alls om det är höger eller vänster: det är 50% chans för höger och 50% för vänster. Spinn upp bör alltså inte visualiseras som en liten pil som pekar exakt rakt upp, för då vet vi ju att den inte alls pekar höger eller vänster. Varifrån skall vi få intuition för något som är så kvantfysiskt?

Det hjälper återigen att tänka på vågor. Två egenskaper kommer till vår räddning. Den första är superposition: amplituden för två vågor som korsar varandra är i varje punkt summan av amplituderna för var och en av vågorna. På samma sätt kan vi tänka oss en superposition av de kvantmekaniska tillstånden 0 och 1, något som brukar skrivas

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

Regeln i kvantfysik är att sannolikheten att finna ett visst tillstånd (0 eller 1) när man har att göra med en superposition av dem, är kvadraten på det tal som multiplicerar tillståndet i uttrycket. Så just den här superpositionen har 50% chans att vara 0 (som vi nu skriver $|0\rangle$) och 50% chans att vara $|1\rangle$. Det låter bekant från resonemanget ovan med obestämdheter. Kan summan $|0\rangle + |1\rangle$ kanske representera ”spinn höger”?

För att skilja på höger och vänster behöver vi jämföra med ytterligare en egenskap hos vågor: fas. Om en våg börjar π radianer efter den andra så är de varandras spegelbilder, dvs. $\sin(x + \pi) = -\sin x$. De två tillstånden i en superposition kan skilja sig exempelvis med fasen π, eller vara i fas. Om vi säger att $|0\rangle + |1\rangle$, som vi kan kalla ”höger”, har noll fasskillnad, så finns det nu ett annat sätt att lägga ihop tillstånd: $|0\rangle - |1\rangle$. Det får representera ”vänster”. (Vilket som är vilket är bara en fråga om konvention.) Om vi istället hade tagit en helt slumpmässig blandning av 50% spinn höger och 50% spinn vänster så hade vi inte kunnat rekonstruera om det var upp eller ned. Experiment visar att de här fasskillnaderna är *bräckliga*.

Man kan jämföra klassiska partiklar med opolariserat ljus, som det från en vanlig glödlampa, som är en slumpmässig blandning av polariseringar. Sådant ljus går genom polarisationsfilter lika mycket oavsett filtrets riktning. En kvantbit (t.ex. ett elektronspinn) är mer som polariserat ljus, som har en specifik polarisationsaxel och påverkas på ett visst sätt av ett polarisationsfilter i en viss riktning. Ett kvanttillstånd med intakta faser kallas *rent*, ett som är en slumpmässig blandning kallas *blandat*.

Den mest karaktäristiska egenskapen hos kvantfysik är något vi kan kalla *snärjelse* (på engelska *entanglement,* ofta även kallat *intrassling* eller *sammanflätning* på svenska). Detta är en egenskap som följer just från sådan faskorrelation mellan kvantbitar, och något som oroade Einstein en hel del. 1935 skrev han tillsammans med två kolleger en artikel där de frågade sig huruvida det föreligger någon motsättning mellan speciell relativitetsteori och kvantfysik. New York Times skrev ”*Einstein Attacks Quantum Theory*”. Idag är den forskningsartikeln faktiskt Einsteins mest citerade!

Orsakssamband, korrelationer och snärjelse

För en klassisk fysiker är snärjelse konstigt, men det är inte ovanligt: nästan alla tillstånd som kvantpartiklar kan vara i är snärjda. Man kan definiera olika ”snärjelse-test”, och det kanske mest grundläggande är snärjelse-entropin. Den definierar jag matematiskt i sidorutan på sidan 110, men det går också att uttrycka konceptet i ord. Om vi föreställer oss de matematiska formlerna som fina skulpturer är våra vardagsord lite som lerklumpar: de är grova men går att hyfsa till. Ett vardagsord som visar sig vara lite väl klumpigt för kvantfysik är *samband.* Det betyder ibland orsakssamband, som i utsagan ”gårdstuppen gol så att jag vaknade”. Tuppen orsakade mitt uppvaknande genom direkt påverkan. Men två företeelser kan ha samband *utan* att direkt påverka varandra.

Ett bekant exempel är nyhetsrapportering av forskningsstudier. Tänk dig en hypotetisk studie där man observerat att folk som dricker mycket sportdryck har bättre hälsa än genomsnittet, och journalisten har valt rubriken ”Sportdrycker bra för hälsan”. Det verkar kanske mer troligt att folk som sportar har bättre hälsa, och att de även väljer att dricka sportdrycker i större utsträckning än andra. Ur lerklumpen ”samband” behöver vi tydligen skulptera fram ett annat ord, och det är *korrelation*: ett samband som inte förutsätter direkt påverkan.

Två händelser kan inträffa regelbundet utan orsakssamband. Om solen hela mitt liv har gått upp strax efter gårdstuppens *kuckeliku*, så är orsaken till soluppgången ändå inte att tuppen gol. Att lokala händelser här på jorden skulle kunna orsaka astronomiska händelser verkade rimligt förr i tiden. När kung Harald II av England kröntes i januari 1066 och Halleys komet dök upp på himlen i april kunde det tolkas som att högre makter var missnöjda med kröningen. Harald II förlorade mycket riktigt slaget vid Hastings i oktober samma år, något som finns illustrerat på Bayeux-gobelängen, där även kometen finns med på ett hörn. Men än idag har många människor svårt att bena ut orsakssamband och korrelation. Ett typiskt exempel är att singla slant: om man har fått klave flera gånger i rad så påverkar det i sig inte chansen att få klave igen.

Låt oss säga att vi singlar en rättvis slant. Kalla utfallen $s = +1$ och -1. Om vi adderar alla utfall och delar med totala antalet får vi medelvärdet, som betecknas $\langle s \rangle$. Det är hälften krona, hälften klave:

$$\langle s \rangle = \sum_i p_i s_i = \frac{1}{2} \cdot 1 \; + \; \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$

Men nu gör vi något lurigt. Börja med att be två rättskaffens människor om hjälp, låt oss kalla dem A och B, eller Agda och Bosse. Vi tar två plastpolletter och skriver $s = +1$ på den ena och $s = -1$ på den andra, och vi ger den som motsvarar värdet från den singlade slanten till Agda, och den andra till Bosse. Gör vi om det många gånger borde både Agda och Bosse få ungefär lika många av varje, alltså noll i medelvärde, som när vi singlade slant utan att dela ut polletter. Men innan Agda tittar på sin pollett bordar hon nu rymdskeppet *Starship* och åker ifrån Bosse med rasande fart.

När Agda närmar sig Mars, låt oss säga den 6:e oktober 2020 då Mars befinner sig ovanligt nära Jorden, bara drygt 3 ljusminuter bort, tittar hon efter och ser att det står $s_A = +1$ på hennes pollett. Hon vet då *ögonblickligen* att det står $s_B = -1$ på Bosses, trots att det skulle ta drygt 3 minuter för dem att kommunicera med radiovågor. Vi kan uttrycka det här sambandet matematiskt som att *produkten* $s_A s_B$ alltid är -1 oavsett vems pollett som visar vad. Därmed är produktens medelvärde $\langle s_A s_B \rangle$ också -1. Vi definierar nu *korrelationsfunktionen* C som skillnaden mellan medelvärdet av produkten och produkten av medelvärdet:

$$C(s_A, s_B) = \langle s_A s_B \rangle - \langle s_A \rangle \langle s_B \rangle = -1 - 0 = -1$$

När korrelationsfunktionen, som i detta fall, inte är noll säger man att de observerbara storheterna s_A och s_B är korrelerade. Hade vi bara låtit Agda och Bosse ta med sig mynt och singla själva hade utfallen däremot givetvis varit oberoende. Totala sannolikheten för oberoende utfall är produkten av sannolikheterna för varje enskilt utfall, som 1/36 för *snake eyes*. Medelvärdet av produkten $s_A \cdot s_B$ blir i det specialfallet detsamma som produkten av medelvärdena, och korrelationsfunktionen C blir exakt noll.

Var det detta som oroade Einstein? Nej, det är ju inget konstigt. Vi kan dra nytta av våra förbättrade ord: sambandet mellan Agdas och Bosses plastpolletter är en korrelation, ingen påverkan.

Det nya i kvantfysik är Heisenbergs obestämdhetsrelation. Om vi bestämmer en storhet (läge x, eller elektronspinn s_z utefter en axel) så är en annan storhet (rörelsemängd p, eller elektronspinn s_x utefter en annan axel) obestämd, enligt diskussionen ovan.

Låt nu Agda och Bosse istället för billiga plastpolletter få noga isolerade kvantbitar i superpositionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle$$

där den första siffran i var och en av de två termerna motsvarar Agdas tillstånd och den andra motsvarar Bosses. Agda åker iväg som förut. Tidigare mätte Bosse om han hade upp (0) eller ned (1). Men nu skulle Bosse kunna vara lurig och ändra sin mätning till att mäta höger/vänster istället för upp/ner. Enligt ovan har både höger och vänster 50% chans att vara antingen 0 eller 1. Då är Agdas mätning helt obestämd, istället för helt bestämd! Inte underligt att Einstein var oroad. Men det han hade fel om var att det måste ske genom direkt *påverkan* på långt avstånd. Istället kan det vara en kvantkorrelation, eller *snärjelse,* mellan elektronerna, utan direkt påverkan på långa avstånd.

Vad kan vi säga om informationen som snärjelsen medför? Agda och Bosses specifika superposition ovan av ett två-kvantbits-tillstånd (alltså intakta kvant-fasskillnader) är totalt sett rent, i likhet med polariserat ljus. Entropin för totala systemet A och B måste då vara $S_{AB} = 0$, för vi vet precis vilket kvant-tillstånd det totala systemet är i: överraskningen är noll. Men vi kan också betrakta Agdas kvantbit enbart inifrån hennes rymdskepp, och räkna ut entropin S_A enbart för henne, om vi ignorerar Bosses kvantbit – se sidorutan på nästa sida.

Om Agda vet värdet på sin kvantbit så vet Bosse genast värdet på sin: de är inte alls oberoende, utan perfekt antikorrelerade, $s_A s_B = -1$. Så var det också i fallet med de klassiska plastpolletterna, fast där var det egentligen klart redan innan de tittat efter vem som fick vilken. Men som visas i sidorutan blir snärjelseentropin $S_A > 0$ för delsystem A, trots att det totala tillståndet är rent och har total entropi noll, $S_{AB} = 0$. Som jag noterade tidigare är det omöjligt i klassisk fysik att totala entropin för ett system A + B skulle kunna bli mindre än entropin för systemen A och B separat. Men i kvantfysik kan snärjelsen, det kvantfysiska sambandet, på något sätt ”ta ut” den entropi som varje enskilt deltillstånd har. Detta trots att entropi i sig aldrig kan vara negativ.

Vad betyder de här entropierna för informationsmängden vi har om systemen? Trots att vi har så mycket information vi kan ha om kvanttillståndet (vågfunktionen) för *totala* systemet som in-

Agdas snärjelseentropi

Schrödingers ekvation ger vågfunktionen ψ, varifrån kvadraten ψ^2 ger sannolikheten. (I allmänhet är kvantvågens amplitud ψ ett komplext tal, men i mina exempel kommer alla amplituder att vara reella.) Vi tar kvadraten på totala vågfunktionen ψ för de observerbara storheterna s_A och s_B och ignorerar Bosse genom att utföra en summa över de två tillstånd Bosses kvantbit möjligen kan befinna sig i:

$$\rho(s_A) = \sum_{s_B} \psi^2(s_A, s_B)$$

Resultatet kallas ”s_A-komponenten av Agdas täthetsmatris”, som betyder sannolikheten att Agda uppmäter ett visst värde på sitt spinn givet att hon inte vet något om Bosses spinn. I textens exempel

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle$$

är tillståndet hos det totala systemet sådant att det är 50% chans att Agda får $s_A = +1$ och Bosse får $s_B = -1$, och 50% chans för omvända situationen, men noll chans att bägge får +1 eller att bägge får −1. Komponenten $s_A = +1$ av Agdas täthetsmatris är i detta fall:

$$\begin{aligned}\rho(s_A = +1) &= \psi^2(s_A = +1, s_B = +1) + \psi^2(s_A = +1, s_B = -1) = \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

och vi får samma värde 1/2 för komponenten $s_A = -1$. Rimligen måste sannolikheterna för $s_A = +1$ och $s_A = -1$ summera till 1, och det gör de. Entropin för Agda räknar vi nu ut på samma sätt som i det klassiska fallet i sidorutan på sid 103. Resultatet blir

$$S_A = -2 \cdot k_{\mathrm{B}} \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = k_{\mathrm{B}} \ln 2 > 0$$

Det viktiga här är att entropin S_A från Agdas perspektiv inte är noll: $S_A > 0$. Vi kallar S_A *snärjelseentropin* för Agda.

En vaken läsare kan ha noterat något mystiskt. Hur kan det ursprungliga tillståndet ha $S_{AB} = 0$, om det var 50% chans för varje alternativ? Men 50% för varje alternativ var det också för spinn höger och spinn vänster tidigare, och de var lika rena som spinn upp och spinn ned. Våra två observatörer får välja mätriktning för sina kvantbitar, och det speciella med det snärjda tillståndet är att mätresultaten blir anti-korrelerade oberoende av vilken mätriktning de väljer, så länge båda mäter i samma riktning. Vi skulle faktiskt kunna kalla riktningen de valt upp/ned oavsett vilken riktning det är – i rymdskepp finns ändå inget upp och ned! Det rena tillståndet med alla sina faser intakta är bara ett enda specifikt tillstånd.

kluderar både A och B, så har vi *inte* fullständig information om delsystemen – faktiskt ingen information alls! Den situationen vore absurd i klassisk fysik: för att veta exakt allt om helheten måste vi veta allt om delarna! Häri ligger också det som Einstein oroade sig för: om vi påstår att vi har total information om hela systemet, och Agda kan röra sig ifrån Bosse som med rymdskeppet ovan, verkar det som att Bosse skulle kunna försöka ändra sitt tillstånd för att ögonblickligen kommunicera med Agda! Som tur är ger sättet vi ”summerar” över Bosses deltillstånd (se uträkningen i sidorutan) att ett sådant förlopp inte alls skulle påverka A:s deltillstånd, trots att det totala tillståndet faktiskt beror på vad Bosse gör. Annorlunda uttryckt: det enda Bosse kan göra är att välja i vilken riktning han ska mäta sin kvantbit. Han kan inte påverka om utfallet ska bli 0 eller 1, och alltså heller inte påverka om Agdas utfall blir 0 eller 1. (Däremot vet han efter att han utfört sin mätning vad Agda skulle få för resultat om hon skulle välja att mäta spinnet i samma led.)

Det informationsteoretiska sättet att uttrycka samma sak är att två klassiska datorer A och B bara kan simulera en kvantdator om de är ihopkopplade med en kabel som kan skicka signaler utan fördröjning, alltså påverka varandra fortare än ljusets hastighet. I en kvantdator behövs ingen sådan kabel: snärjda totala tillstånd som det ovan kan avnjuta kvantfysisk korrelation utan klassisk påverkan.

Tillbaka in i svarta hålet

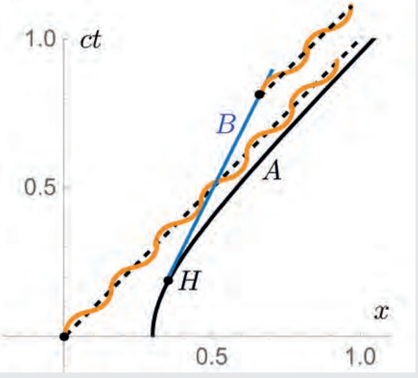
Nu skulle vi vilja återkomma till svarta hål. Mysteriet med Brian Greenes bankkort går att uttrycka så här med våra nyfunna mer precisa ord: Agda och Bosse tilldelas ett snärjt tvåkvantbit-tillstånd. Agda hovrar med sitt rymdskepp i det starka gravitationsfältet utanför ett svart hål, medan Bosse hoppar ut från rymdskeppet och faller in genom händelsehorisonten. Vi skulle vilja räkna ut snärjelseentropin som i sidorutan tidigare, och ta hänsyn till både händelsehorisontens existens och dess Hawkingstrålning. Men forskare är inte överens om hur man gör de här uträkningarna då! Låt oss därför backa från fullfjädrad kvantgravitation till kvantfysik i speciell relativitetsteori. Det innebär att drastiskt förenkla problemet och betrakta ett litet område i närheten av det svarta hålet, där gravitationen är ungefär konstant. Konstant gravitationsfält ger upphov till konstant acceleration (precis som i newtonsk gravitation). Och konstant acceleration i speciell relati-

Rindlerhorisonten

För att åskådliggöra hur konstant acceleration ger upphov till en horisont i speciell relativitetsteori behöver vi införa något som kallas rumtidsdiagram. Det är lite som en *x*-*t*-graf i mekanik, fast med två skillnader. Den mindre viktiga skillnaden är att man väljer att rita tiden på den vertikala axeln istället för den horisontella, vilket innebär att lutningen av en rät linje i rumtidsdiagrammet (eller *t*-*x*-grafen) ger ett genom farten, istället för farten (som i *x*-*t*-grafen). En snabb partikel har alltså liten lutning, inte stor, och en stillastående partikel blir en vertikal linje. Den viktiga skillnaden jämfört med newtonsk mekanik är att inget kan färdas snabbare än ljuset. Om vi därför avsätter *ct* på den vertikala axeln istället för *t*, så kommer alla partiklar (med massa) att avbildas som linjer med lutning mer än 45 grader (dvs. fart lägre än *c*).

I newtonsk fysik hade en konstant accelererande partikel i diagrammet helt enkelt motsvarat en parabel som med tiden fått hur liten lutning som helst i grafen (dvs. hur stor fart som helst), och därför inte haft något problem att korsa någon viss gräns i rumtidsdiagrammet. I relativitetsteori, däremot, beskrivs en konstant accelererande observatör av en kurva som asymptotiskt alltmer närmar sig den 45-gradiga linjen i diagrammet utan att korsa den, som i figur 3. Denna 45-gradiga linje kommer därmed fungera som en horisont: allt som är bakom den är osynligt för den accelererande observatören.

Vi låter nu Agda gasa ordentligt, men alltså med *konstant* acceleration *a*. Vid händelse *H* hoppar Bosse ut ur rymdskeppet och fortsätter därefter med konstant hastighet (dvs. längs en rät linje i *ct*-*x*-diagrammet). När Bosse korsar den första streckade linjen i figur 3 försöker han kommunicera med Agda med en ljuspuls, men den når henne aldrig. Så länge hon fortsätter gasa, vill säga, men i vårt tankeexperiment kan vi tänka oss att det är godtyckligt länge. För Agda är situationen därför ganska lik den om Bosse hade fallit genom händelsehorisonten i ett svart hål. Linjen vid 45° kallas därför *Rindlerhorisont*, efter den österrikisk-engelske fysikern Wolfgang Rindler, som för övrigt också var den som introducerade ordet händelsehorisont.



Figur 3: Observatören A rör sig med konstant acceleration åt höger, och kommer därmed uppfatta en horisont: så länge accelerationen fortgår kan A inte nås av någon information från andra sidan av den 45-gradiga linjen som utgår från origo. Enheterna är x i meter och ct i ljussekunder, så ljuspulser går utefter 45°.

vitetsteori ger faktiskt upphov till en horisont för den som accelererar – se sidorutan ”Rindlerhorisonten”.

Tar man hänsyn till kvantmekanik finner man att Agda skulle uppmäta *strålning* från den till synes ganska oförargliga Rindlerhorisonten! Även denna strålning visar sig vara fördelad som den från en svart kropp, och den temperatur som strålningen motsvarar är till råga på allt snarlik Hawkingtemperaturen:

$$T = \frac{ha}{4\pi^2 c k_\mathrm{B}}$$

Man återfår det exakta uttrycket för Hawkingtemperaturen genom att sätta in den acceleration a som är relevant nära ett svart hål, och som i det fallet beror på gravitation, och därmed massan M. Rindlerhorisonten uppstår utan gravitationsfält, men enligt Einsteins ”ekvivalens-princip” är acceleration ekvivalent med gravitation.

Om vi kan räkna ut entropin hos horisonten från konstant acceleration kan vi kanske bättre förstå även hur riktiga horisonter vid svarta hål lagrar kvantinformation. Som jag beskrev i inledningen uppstår paradoxen i och med att det dunstande svarta hålet inte kommer att kunna lagra tillräckligt med kvantinformation. Den enklast tänkbara modellen för att matematiskt analysera problemet är att betrakta Agdas snärjda kvantbit som en minsta byggsten av Hawkingstrålning.

Nu har vi nått forskningsfronten, där mysteriet med kvantgravitation kan delas upp i många mindre munsbitar, tillräckligt små för enskilda forskare att hantera. Edward Witten vid Princeton-universitetet räknade nyligen ut snärjelseentropin för en Rindlerhorisont med den s.k. orbifold-metoden, som även jag själv arbetat med. Många duktiga unga forskare, t.ex. Daniel Persson vid Chalmers, har noterat intressanta nya samband mellan den abstrakta gren av matematik som kallas talteori och de svarta hålens kvantfysik.

En potentiell fördel med modeller som den med accelererande kvantbitar vid en Rindlerhorisont är att de – till skillnad från riktiga svarta hål – medger laboratorieexperiment. På så sätt skulle man i princip kunna försöka mäta snärjelseentropin hos en horisont. En utmaning är att det inte bara är de två snärjda kvantbitarna, utan även detektorsystemen A och B (Agda och Bosse själva), som i så fall måste konstrueras i laboratoriet. Forskare på Chalmers har studerat s.k. Moore-DeWitt-detektorer. Kanske kan vidareutveckling av sådana experiment testa de nya teoretiska beräkningarna.

I sin sista forskningsartikel från 2018 pekade Hawking på en hemlig gömma som kanske i framtiden kan avslöja hur svarta hål kan lagra information: lågenergi-gravitoner, som jag nämnde tidigare. Att utveckla beräkningsmetoder för kvantamplituder som tar hänsyn till lågenergi-gravitoner är något jag arbetar på tillsammans med Oliver Schlotterer i Uppsala. Den amerikanske fysikern Strominger arbetar med interferometriska astrofysikstudier av verkliga svarta hål som det i galaxen M87. Pixlarna i de teleskopens digitalkameror, alltså nollorna och ettorna, är ett sätt att föreställa sig att något kanske kodats vid händelsehorisonten. Vad är nästa steg i observationerna? Tänk om vi kunde filma när materia faller in i det svarta hålet?

Vi som håller på med forskning måste besvara frågan vad allt det här ska vara bra för. Kvantfysik ledde via uppfinningen av transistorn till vanliga datorchip och en enorm teknologisk utveckling, långt efter att Heisenberg och hans kollegor hade gått ur tiden. Man kan inte vara säker på att lösning av kvantgravitationens mysterier leder till någon samhällsnytta. Det kan vara så att kvantgravitationens mysterier inte ens har formulerats tillräckligt skarpt ännu. Kanske sitter den som kommer att lösa dem vid ett tält och begrundar en vacker solnedgång och undrar: Kommer det ljus över horisonten? ❖

Marcus vill tacka Claes Uggla vid Karlstads universitet, Sören Holst och Ingemar Bengtsson vid Stockholms universitet samt Michael Bradley vid Umeå universitet för upplysande diskussioner.

För vidare läsning

M. Perry, *Black holes and soft hair: why Stephen Hawking's final work is important* (2018), The Guardian. (Tillgänglig via https://www.theguardian.com/science/2018/oct/10/black-holes-and-soft-hair-why-stephen-hawkings-final-work-is-important)

För mer om kvantmekanik, se L. Susskind, A. Friedman, *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum* (2015), Basic Books. Hemsida med videoföreläsningar: theoreticalminimum.com

Marcus har material för allmänheten på webbsidan (tp.hotell.kau.se/marcus/outreach/), och en YouTube-kanal (youtube.com/user/marcusbergmovie/videos) med videor om bland annat speciell relativitetsteori och entropi.