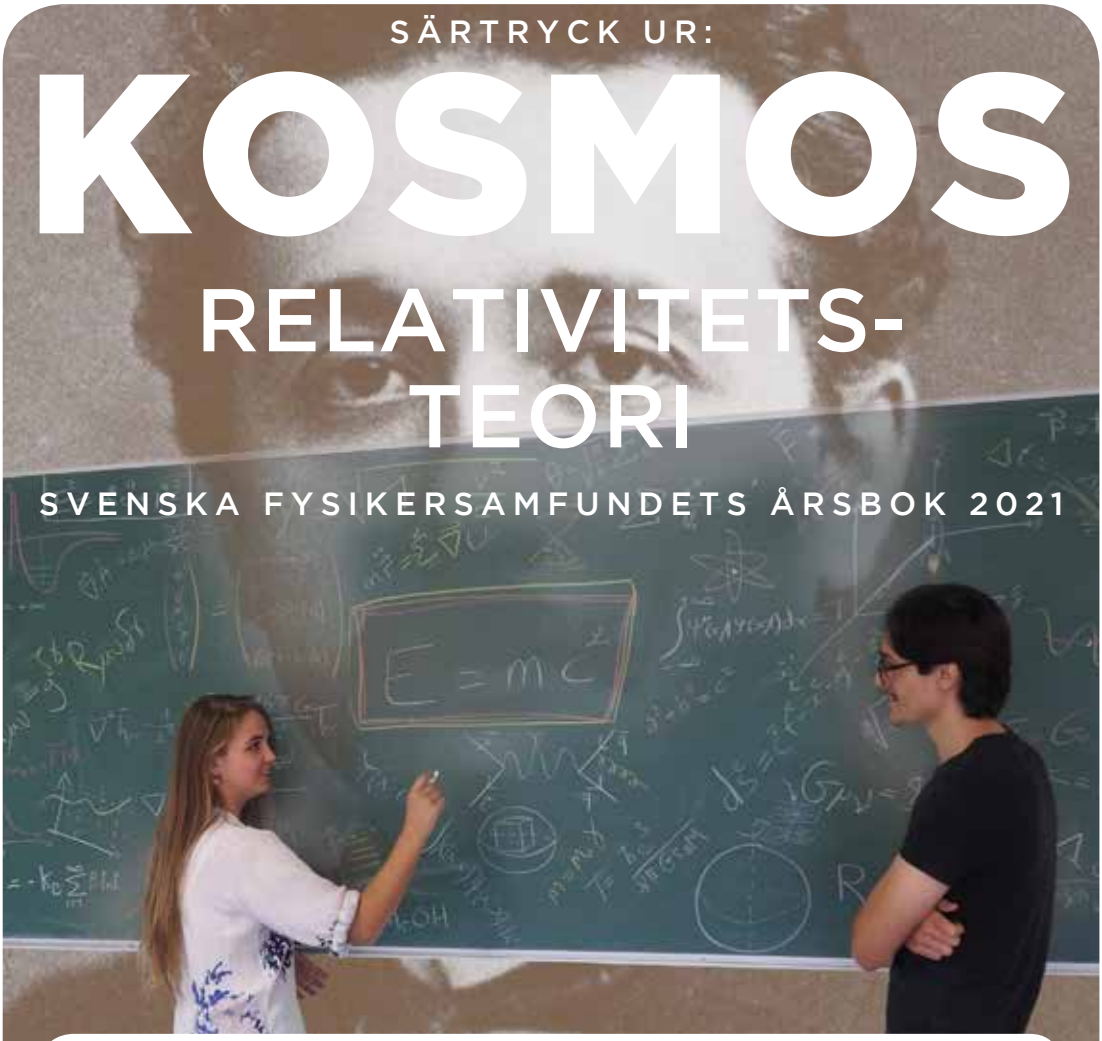
SÄRTRYCK UR:

KOSMOS

RELATIVITETS-TEORI

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS ÅRSBOK 2021



ROTERANDE RUMTIDER OCH GRAVITATIONSVÅGOR

© MICHAEL BRADLEY

Artikeln publiceras under Creative Commons-licensen CC BY-NC-SA 4.0
För bildmaterial med källhänvisning gäller samma upphovsrättsliga regler som för källan.

SVENSKA FYSIKER SAMFUNDET

Michael Bradley

är professor vid Umeå universitet. Inom sitt forskningsområde, allmän relativitetsteori, har han bl.a. studerat modeller för roterande stjärnor, metoder för konstruktion av exakta lösningar till fältekvationerna och metoder för störningsräkning i kosmologi.

Michael Bradley bidrar med en pedagogisk artikel om rumtidsbegreppet. Han förklarar vilka fenomen som förväntas då en sådan rumtid roterar. Detta sätts i sitt rätta sammanhang och vi får också en förklaring till gravitationsvågor.

Gyroskop använda i Gravity Probe B-experimentet för att mäta hur jorden påverkar rotationsriktningen hos ett spinnande föremål i bana runt jorden. (Foto från einstein.stanford.edu/gallery/)

Roterande rumtider och gravitationsvågor

Einsteins allmänna relativitetsteori generaliserar både speciell relativitetsteori och Newtons gravitationsteori. För svaga fält och låga hastigheter går den över i Newtons teori, men den förutsäger också en hel del nya fenomen som svarta hål och gravitationsvågor. Existensen av svarta hål har starka indirekta observationella stöd (Nobelpris 2020) och den första direkta detektionen av gravitationsvågor gjordes den 14:e september 2015 (Nobelpris 2017). I den här artikeln ska vi se närmare på dels gravitationsvågor och dels en annan grupp av nya fenomen som hänger ihop med hur rotation hos materien påverkar rum och tid, den s.k. rumtiden. Under speciella förhållanden verkar, åtminstone i teorin, t.o.m. tidsmaskiner kunna existera i roterande rumtider. Rotation och associerade tröghetskrafter är också nära relaterade till frågan om vad som bestämmer ett tröghetssystem.

Enligt Newtons gravitationsteori, som beskriver planeternas rörelser runt solen med hög noggrannhet, bestäms gravitationsfältet från en kropp enbart av dess massfördelning. Därför borde gravitationsfältet från t.ex. jorden endast påverkas indirekt av dess rotation genom den tillplattning som centrifugalkrafterna ger upphov till, men inte av rotationen i sig. Dock visar ett experiment kallat Gravity Probe B att spinnande gyroskop i en satellit runt jorden känner av en meddragningseffekt, *frame dragging*, på grund av jordens rotation. Effekten är liten, men kan bli betydande nära kompakta roterande objekt som neutronstjärnor och svarta hål. Meddragningseffektens påverkan på den materia som typiskt samlas i diskar runt svarta hål har observerats och använts för att bestämma hur snabbt de svarta hålen roterar.

Ett mer uppenbart problem med Newtons teori är att den inte har någon tidsfördröjning, teorin är en s.k. verkan på avstånd-

teori. Om något händer med källan känns detta av omedelbart på godtyckligt stora avstånd. Nu vet vi från speciell relativitetsteori att det finns en maximal hastighet med vilken information kan överföras. Hastigheten, c, är lika med ljushastigheten, och har numera definierats till att ha det exakta värdet $299\,792\,458$ m/s. Denna maximala hastighet indikerar att Newtons gravitationsteori behöver modifieras till en teori som ger en tidsfördröjning mellan orsak och verkan. På samma sätt som den ändliga ljushastigheten medför att det elektromagnetiska fältet utbreder sig som vågor kommer den nya gravitationsteorin att förutsäga existensen av gravitationsvågor.

Tidiga försök mot en ny gravitationsteori

Det Newtonska gravitationsfältet $\mathbf{g}$ från en massfördelning kan ges i termer av en potential ϕ som $\mathbf{g} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. Potentialen ϕ ger den gravitationella lägesenergin per massa, och i termer av ϕ kan gravitationslagen omformuleras till Poissons ekvation:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad ,$$

där $G = 6{,}67\times10^{-11}$ m^3/kg/s^2 är den allmänna gravitationskonstanten och ρ masstätheten.

Låt oss jämföra med vågekvationen

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

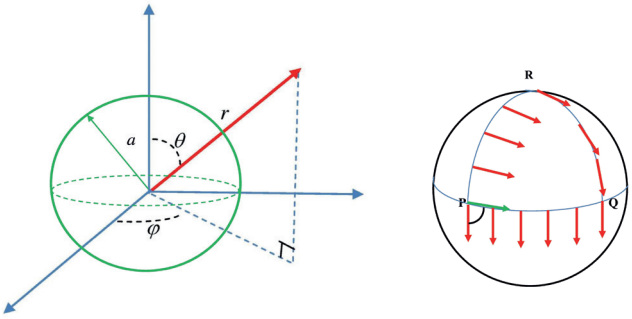
som beskriver en våg som utbreder sig med en hastighet c. En naturlig generalisering av gravitationslagen, som både tar hänsyn till tidsfördröjningen på grund av den ändliga ljushastigheten och är kopplad till källan, skulle då kunna ges av

$$\nabla^2\phi \; - \; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 4\pi\, G\rho \quad .$$

En liknande teori föreslogs faktiskt av den finlandssvenske fysikern Gunnar Nordström redan 1912, före publiceringen av allmän relativitetsteori, men den stämde inte med observationer. Nordström gjorde sedan många andra betydande bidrag till utvecklingen av gravitationsteorin, och var bl.a. en av de första att föreslå en geometrisk teori för gravitationen. Han är även känd för Reissner-Nordström-metriken, vilken är en lösning till fältekvationerna i allmän relativitetsteori som beskriver ett elektriskt laddat svart hål.

Krökta rum

En geometri kan lokalt beskrivas m.h.a. metriken, som ger avståndet i kvadrat mellan två närbelägna[1] punkter. För ett platt tvådimensionellt rum kan vi använda de kartesiska koordinaterna x och y och vi får från Pythagoras sats att avståndet $\mathrm{d}s$ mellan punkterna (x, y) och $(x+\mathrm{d}x\,, y+\mathrm{d}y)$ ges av $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Det finns en stor frihet i val av koordinater, och i ett plan kan man t.ex. också använda polära koordinater så att metriken ges av $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$. Ett exempel på ett genuint krökt tvådimensionellt rum ges av sfären, som beskrivs av metriken $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ om radien är a, se Figur 1.



Figur 1: *Vänstra bilden: sfäriska koordinater som definieras från* $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$ *och* $z = r\cos\theta$, *samt en sfär med radien* a. *I dessa koordinater ges avståndet mellan två närbelägna punkter i det vanliga tredimensionella och platta rummet av* $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$. *En sfär med radien* a *fås av de punkter som ligger på avståndet* $r = a$ *från origo. Eftersom då* $\mathrm{d}r = 0$, *blir metriken på den tvådimensionella sfären* $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$. *I den högra bilden visas hur en vektor som parallellförflyttas längs en sfärisk triangel (från P till Q till R och tillbaks till P) har ändrat riktning efter ett varv, den s.k. geodetiska effekten. Här är den tydlig, men ju mindre den slutna kurvan är desto mindre är effekten.*

På grund av friheten i val av koordinater kan det vara svårt att avgöra om en given metrik verkligen beskriver ett krökt rum eller ett platt rum i andra koordinater än de vanliga. För att avgöra saken kan man beräkna den s.k. Riemann-tensorn eller krökningstensorn, $R^{\mu}_{\nu\sigma\tau}$, som ger den lokala krökningen för det rum som beskrivs av metriken. Den är identiskt noll om och endast om

[1] *När vi går över till krökta rum eller andra koordinater än kartesiska blir avståndsformlerna meningsfulla endast för infinitesimala avstånd, så därför använder vi differentialer redan från början.*

rummet är lokalt platt. I två dimensioner motsvaras den av den Gaussiska krökningen, som ges av $1/(\rho_1\rho_2)$, där ρ_1 och ρ_2 är den största och minsta krökningsradie som kurvor genom en given punkt på ytan har. För en sfär med radien a gäller att $\rho_1 = \rho_2 = a$.

I Gravity Probe B-experimentet, som behandlas längre fram i artikeln, visades att gyroskop som parallelltransporterats runt jorden ändrat sina riktningar i enlighet med den allmänna relativitetsteorins förutsägelser. Parallelltransport av en vektor längs en rät linje i ett platt rum kan definieras som att vinkeln mellan vektor och linje bevaras. De rakaste möjliga banorna i ett krökt rum kallas geodeter, och vid parallelltransport längs dem bevaras också vinkeln. Man kan förstås parallelltransportera en vektor längs andra kurvor än geodeter, men då varierar vinkeln mellan vektorn och kurvans tangent längs kurvan. Om man parallelltransporterar en vektor runt en sluten kurva i ett platt rum kommer den att ha behållit sin riktning när den återkommit till utgångspunkten, till skillnad från i ett krökt rum där den kommer att ha ändrat riktning, den s.k. geodetiska effekten. Ett sätt att definiera Riemann-tensorn i en punkt är genom hur mycket en vektor som parallelltransporteras runt en liten sluten kurva runt punkten ändrar riktning.

Speciell relativitetsteori

För att förstå varför en geometrisk formulering kan vara fruktbar för en beskrivning av gravitation börjar vi med att titta på speciell relativitetsteori. Av grundläggande betydelse är begreppen *rumtid*, som infördes av Hermann Minkowski 1908, och *händelse*. Rumtiden är en sammanslagning av rum och tid till ett fyrdimensionellt rum med koordinaterna (ct, x, y, z), se Figur 2 där y- och z-koordinaterna är undertryckta. En händelse karaktäriseras av var och när den sker och kan beskrivas med en punkt i rumtiden. Partiklars rörelser ges av banor i rumtiden, s.k. världslinjer. På grund av att ljus alltid rör sig med hastigheten c kommer ljusets banor från en given händelse att bilda en s.k. ljuskon i rumtiden, se figurtexten. Massiva partiklar rör sig med hastigheter som är mindre än c, och de kan därför inte korsa ljuskonen. Notera att ljuskonens axel därför definierar den lokala tidsriktningen. Ljuskonsbegreppet blir användbart i fortsättningen när vi ska studera hur tidsresor kan bli möjliga.

Krökning

Riemann-tensorn, $R^{\mu}_{\ \nu\tau\sigma}$, ger ett mått på ett rums krökning och är en tensor med fyra index. Den har symmetrierna $R_{\mu\nu\tau\sigma} = -R_{\nu\mu\tau\sigma} = R_{\tau\sigma\mu\nu}$ och $R^{\mu}_{\ \nu\tau\sigma} + R^{\mu}_{\ \sigma\nu\tau} + R^{\mu}_{\ \tau\sigma\nu} = 0$. I två dimensioner kan varje index i Riemann-tensorn ta värdena 1 eller 2, så det kan verka som att den har 2^4 olika komponenter, men p.g.a. symmetrierna har den bara en oberoende komponent. I fyra dimensioner tar indexen värdena 0,1,2 eller 3, som ger 4^4 komponenter, som symmetrierna sedan reducerar till 20 oberoende. I termer av metriken ges Riemann-tensorn av:

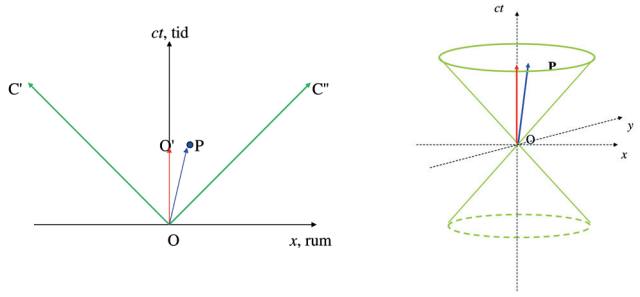
$$R^{\mu}_{\ \nu\tau\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \nu\sigma}}{\partial x^{\tau}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \nu\tau}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\rho}_{\ \nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\ \rho\tau} - \Gamma^{\rho}_{\ \nu\tau}\Gamma^{\mu}_{\ \rho\sigma} \quad ,$$

där Christoffel-symbolerna ges av

$$\Gamma^{\mu}_{\ \nu\tau} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\tau}} + \frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial x^{\sigma}}\right).$$

Einsteins summakonvention har här använts, t.ex. $\Gamma^{\rho}_{\ \nu\tau}\Gamma^{\mu}_{\ \rho\sigma} \equiv \sum_{\rho=0}^{3} \Gamma^{\rho}_{\ \nu\tau}\Gamma^{\mu}_{\ \rho\sigma}$. Riemann-tensorn i en punkt P kan definieras genom den geodetiska effekten för en vektor v^{μ} som parallelltransporteras runt en infinitesimal sluten kurva runt P som $\Delta v^{\mu} = -\frac{1}{2}(R^{\mu}_{\ \nu\tau\sigma})_{\mathrm{P}}\, v^{\nu} A^{\tau\sigma}$, där $A^{\tau\sigma}$ ger ytan innnaför kurvan. Från Riemann-tensorn definierar man sedan Ricci-tensorn som $R_{\mu\nu} \equiv R^{\tau}_{\ \mu\tau\nu}$ och krökningsskalären $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Einstein-tensorn ges av $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2}$. För två-dimensionella ytor är krökningsskalären två gånger den Gaussiska krökningen, dvs. $R = 2/(\rho_1\rho_2)$. Här är ρ_1 och ρ_2 den största och minsta krökningsradie som kurvor genom en given punkt har. För en sfär sammanfaller de två krökningsradierna med sfärens radie.

Låt oss nu betrakta två olika händelser, där den ena är utsändandet av en ljussignal och den andra mottagandet av signalen. Antag för enkelhets skull att vi bara har en rumsriktning, som ges av x-axeln. Om ljuset rör sig sträckan $\mathrm{d}x$ på tiden $\mathrm{d}t$ fås att dess hastighet är $c = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Enligt relativitetsteorin är ljushastigheten samma för alla observatörer, så en annan observatör med koordinaterna x' och t' får på samma sätt $c = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$. Vi kan nu definiera ett generaliserat avstånd i rumtiden $\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$ och ser att det har samma värde för bägge observatörerna, nämligen noll. I allmänhet är ds och $\mathrm{d}s'$ mellan två olika händelser inte noll, men om man postulerar att $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s'$ för alla par av hän-



Figur 2: *Händelserna O och O′ i den vänstra figuren sker båda i $x = 0$ och pilen OO′ kan visa hur en fix observatör rör sig i rumtiden. På motsvarande sätt representerar pilen OP något som rör sig mellan O och P med en konstant hastighet mindre än ljushastigheten. Eftersom ljus rör sig med hastighet c följer ljus som utgår från O banor för vilka $x = \pm ct$. De ges av pilarna OC′ och OC′′, som lutar 45° i diagrammet. I den högra bilden (där vi visar två av de tre rumsdimensionerna) kan vi se hur ljus som sänds ut från origo rör sig längs en kon. Eftersom hastigheten för massiva partiklar alltid är mindre än c rör de sig längs banor med en lutning som är mindre än 45°.*

delser fås en konsistent teori som stämmer med observationer[2]. Om vi utvidgar denna s.k. invariant till tre rumsdimensioner fås Minkowski-metriken:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \equiv \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \\ &\equiv \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \quad , \quad \mu,\nu = 0,1,2,2 \quad , \end{aligned}$$

där i sista steget Einsteins summakonvention har använts. Den symmetriska fyra gånger fyra-matrisen $\eta_{\mu\nu}$ ges av:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Minkowski-metriken är en slags generalisering av Pythagoras sats, men med olika tecken för rums- och tidstermerna.

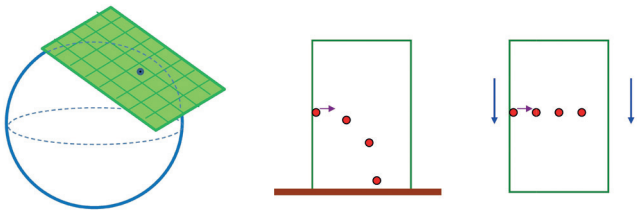
[2] Antagandet kan dessutom motiveras från rumtidens symmetrier.

Allmän relativitetsteori

Idén är nu att införa gravitation genom att generalisera till krökta rumtider. Vi gör detta genom att låta koefficienterna $\eta_{\mu\nu}$ i $\mathrm{d}s^2$ vara mer allmänna symmetriska funktioner $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ av rum och tid, så att $\mathrm{d}s^2$ går över i:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \quad , \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad .$$

Information om geometrin, alternativt gravitationsfältet finns nu i komponenterna $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\tau)$, som är tio oberoende funktioner av rumtidskoordinaterna. En begränsning på hur metriken kan väljas är dock att man runt en godtycklig rumtidspunkt ska kunna välja koordinater så att metriken nästan sammanfaller med Minkowski-metriken. Geometriskt motsvaras det av att man kan approximera en krökt yta runt en punkt med tangentplanet i den punkten. Gravitationellt sett motsvaras det av att man alltid kan



Figur 3: *I vänstra bilden ses hur en buktig yta kan approximeras med sitt tangentplan i en omgivning av en punkt. I de två andra visas dels hur en boll som kastas horisontellt vid jordytan följer en kastparabel, och dels hur den blir tyngdlös i ett fritt fallande system.*

välja ett fritt fallande system, vilket innebär att gravitationen lokalt trollas bort i ett område som är tillräckligt litet för att gravitationsfältet ska kunna ses som homogent.

Detta är den s.k. ekvivalensprincipen, som också kan formuleras som att den tröga och tunga massan är lika, vilket innebär att alla massor får samma acceleration i ett givet gravitationsfält. Den tröga massan är den som ger ett motstånd mot en accelererande kraft i Newtons andra lag och den tunga är den gravitationella laddning som gör att massor attraherar varandra enligt Newtons gravitationslag. Den ungerske fysikern Loránd Eötvös visade redan runt förra sekelskiftet att den relativa skillnaden mellan tung

och trög massa var mindre än 10^{-8}. Nutida mätningar med satelliten MICROSCOPE ger en övre gräns på 10^{-15}. Ytterliggare ett sätt att formulera ekvivalensprincipen är att testpartiklar som endast påverkas av gravitationen rör sig längs de rakast möjliga banorna i rumtiden, dvs. geodeter.

Notera att $g_{\mu\nu}$ närmast är en generalisering av den Newtonska potentialen ϕ, så vad som närmast motsvarar det Newtonska gravitationsfältet $\mathbf{g}$ är derivator av $g_{\mu\nu}$, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\tau}$. Att vi kan hitta ett system där gravitationsfältet försvinner i en punkt motsvaras då av att derivatorna blir noll i den punkten (men inte överallt). För att avgöra om en rumtid är genuint krökt behöver vi även bestämma Riemann-tensorn (se faktaruta om krökning), som innehåller andra-derivator av metriken. Gravitationellt sett är Riemann-tensorn ett mått på inhomogeniteter i gravitationsfältet, så kallade tidvattenkrafter.

För att få en komplett teori behöver vi också ekvationer som, likt Poissons ekvation i Newtons teori, kopplar gravitationsfältet till dess källor, dvs. materia och annan energi. De slutliga ekvationerna, Einsteins ekvationer, publicerades av Albert Einstein 1915. De relaterar krökningen, som beskriver gravitationen, till källorna och ges av:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad ,$$

där Einstein-tensorn $G_{\mu\nu}$ är en rent geometrisk storhet bildad från Riemann-tensorn, och $T_{\mu\nu}$ beskriver materiens energi och rörelsemängd. En så kallad kosmologisk konstant Λ är också tillagd. En positiv kosmologisk konstant ger ett slags negativt tryck som kan balansera den attraktiva gravitationskraften. Den lades först till av Einstein för att kunna få ett statiskt universum, men han förkastade den sedan när Edwin Hubbles resultat 1929 visade att universum verkar expandera. Konstanten har fått en renässans på senare år som en förklaring till de observationer som visar att universum inte bara expanderar utan att expansionshastigheten dessutom ökar. Utan kosmologisk konstant borde expansionshastigheten minska p.g.a. den ömsesidiga attraktiva gravitationen mellan universums olika delar.

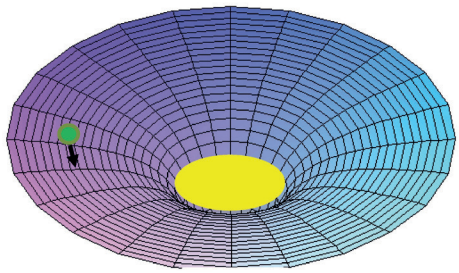
På grund av att man kan välja de fyra rumtids-koordinaterna nästan fritt kan man alltid transformera bort fyra av metrikens komponenter, så gravitationsfältet verkar alltså ha totalt sex ge-

nuina frihetsgrader. Newtons gravitationsteori har bara en frihetsgrad, given av potentialen ϕ, så vad är tolkningen av de övriga?

Tolkningen beror till viss del på hur vi fixerar koordinaterna, men lite löst kan vi säga att en av frihetsgraderna kan ses som en generalisering av den Newtonska potentialen ϕ, tre som en rumsvektor som beskriver hur rumtiden dras med av rotationen hos källan till gravitationsfältet och slutligen två frihetgrader som beskriver polarisationerna hos ett masslöst fält som fortplantar sig med ljushastigheten, dvs. gravitationsvågor.

Schwarzschild-metriken

Innan vi ger oss in på roterande rumtider, låt oss se hur fältet runt en icke roterande stjärna ser ut och sedan sätta snurr på den. Fältet i vakuum utanför en sfäriskt symmetrisk kropp ges av Schwarzschild-metriken, som fanns av Karl Schwarzschild 1916 när han befann sig i en av första världskrigets skyttegravar. Den beskriver



Figur 4: *Representering av rummets krökning i ekvatorialplanet ($\theta = \pi/2$). Den centrala delen av Schwarzschild-metriken är bortskuren och ersatt av solen, och runt den rör sig en planet (det mindre klotet).*

också icke-roterande svarta hål. I sfäriska koordinater ges metriken av:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 \ ,$$

där $m \equiv \frac{GM}{c^2}$ i termer av massan M hos objektet som ger upphov till fältet. Bortsett från massans värde är detta den unika sfäriskt symmetriska vakuumlösningen till Einsteins ekvationer. Om m sätts till noll beskriver metriken ett platt rum och r ger då avståndet från centrum. För normala stjärnor är termen $\frac{2m}{r}$ mycket

mindre än ett i vakuumregionen utanför stjärnan, vilket betyder att avvikelsen från platt rum är liten och att gravitationen är svag och beskrivs väl av Newtons gravitationslag. För solen är $2m$ ungefär 3 km, dvs. mycket mindre än solens radie, innanför vilken ändå en annan lösning till fältekvationerna gäller.

Med egentid menar vi den tid som en observatör mäter i sitt eget vilosystem. Egentiden som en fix observatör mäter vid en radie r ges av $\tau = \sqrt{1-\frac{2m}{r}}\ t$. Vi ser att ju djupare ner vi är i gravitationsfältet, desto långsammare går tiden. Från detta följer att ljus med våglängden λ_1 som sänds från en radie r_1 till en större radie r_2 blir rödförskjutet till λ_2 enligt:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r_2}}}{\sqrt{1-\frac{2m}{r_1}}} \quad .$$

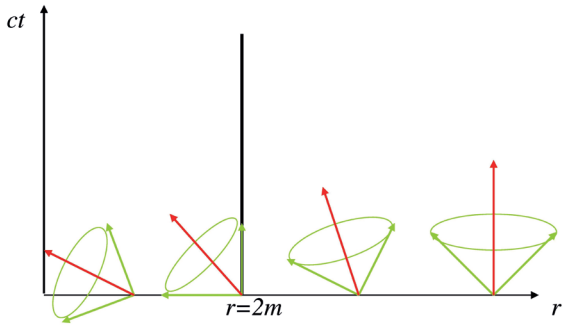
Det kan tolkas som att fotonerna tappar energi när de arbetar sig upp i gravitationsfältet.

En normal stjärna kan inte vara mindre än $2m$ eftersom en av koefficienterna blir noll och en annan oändlig för $r = 2m$. Schwarzschild-metriken beskriver då ett icke-roterande svart hål som omges av en händelsehorisont vid $r = 2m$. Det är en yta bortom vilken ingen återvändo är möjlig. Vid den tippar ljuskonen över så mycket att allt, inklusive ljus, tvingas röra sig mot ett oändligt tätt tillstånd — en singularitet — vid $r = 0$. Den lokala tidsriktningen ges av ljuskonens symmetriaxel. Det verkar alltså som att betydelsen av koordinaterna t och r byter plats vid händelsehorisonten[3]. Som ses i formeln ovan går också rödförskjutningen mot oändligheten för ljus som sänds ut nära händelsehorisonten.

Svarta hål kan t.ex. bildas från kollapsande massiva stjärnor som förbrukat sitt bränsle och inte längre kan skapa ett tryck som balanserar gravitationen. Även de centrala delarna av galaxer verkar härbärgera gigantiska svarta hål som antagligen formats i samband med bildandet av galaxerna.

Nobelpriset 2020 tilldelades Roger Penrose ”för upptäckten att bildandet av svarta hål är en robust förutsägelse av allmän rela-

[3] I själva verket gäller inte koordinaterna på själva händelsehorisonten, men man kan finna andra som är giltiga både utanför och innanför händelsehorisonten, bortsett från i singulariteten vid $r = 0$. De givna koordinaterna kan användas även innanför händelsehorisonten, men då är r en tidskoordinat och t en rumskoordinat.



Figur 5: *Ljuskonen tippar över mer och mer ju närmare händelsehorisonten den är. Vid $r = 2m$ tippar den över så mycket att ljus fångas. Den lokala tidsriktningen ges av konens axel.*

tivitetsteori" (se artikel av Ingemar Bengtsson i denna upplaga av Kosmos), och till Reinhard Genzel och Andrea Ghez "för upptäckten av ett supermassivt kompakt objekt i centrum av vår galax".

Rotation i allmän relativitetsteori

En approximativ vakuumlösning till Einsteins ekvationer som beskriver fältet utanför en långsamt roterande stjärna ges av:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{4ma\sin^2\theta}{r}\,c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Rotationsparametern ges av $a = J/(cM)$, där J är stjärnans rörelsemängdsmoment och ger en ny frihetsgrad vid sidan av massparametern m. I det här koordinatsystemet är gravitationsfältet tidsoberoende och roterar inte oändligt långt från stjärnan.

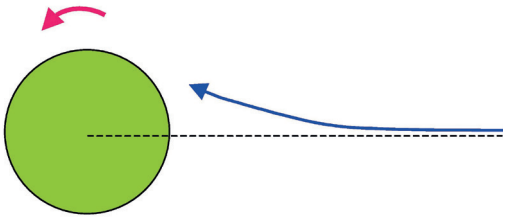
Lokalt finns i allmän relativitetsteori alltid en naturlig uppdelning mellan vad som är rum och tid för en given observatör. Korstermen $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$ visar dock att rum och tid är intimt förknippade och att en global uppdelning mellan dem inte alltid är möjlig.[4]

En effekt av detta är att man inte kan synkronisera en uppsättning av klockor som ligger fixa i rummet i en ring runt stjärnan. Man kan försöka genom att stegvis skicka ljustrålar från första till

[4]Man kan dock välja koordinater så att korstermen försvinner, men i allmänhet blir man ändå inte av med problemen med rumtidens globala struktur.

andra klockan o.s.v. tills man gått varvet runt. Eftersom ljuset alltid rör sig med en och samma hastighet c och de rumsliga avstånden kan mätas, vet man hur lång tid det ska ta att gå mellan klockorna. Först kommer man överens om att den första klockan nollställs när första signalen sänds ut. De andra vet sedan när de ska få sina signaler och kan ställa sina klockor därefter. Efter ett varv kommer dock första och sista klockan (som placerats på samma plats) att visa olika tider!

Korstermen ger också en effekt som kan ses som att rumtiden dras med av rotationen, *frame dragging*. Låt oss betrakta det hela i ekvatorialplanet, $\theta = \pi/2$, där effekten av rotationen är som störst. Låt en partikel falla fritt in mot stjärnan från så stort av-



Figur 6: *En partikel som faller in mot en roterande källa dras med av rotationen.*

stånd att rotationseffekten kan försummas. Antag vidare att dess rörelsemängdsmoment är noll, dvs. att den initialt inte rör sig i φ-riktningen. Trots detta kommer partikeln att få en vinkelhastighet som ges av

$$\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{2cam}{r^3} \quad .$$

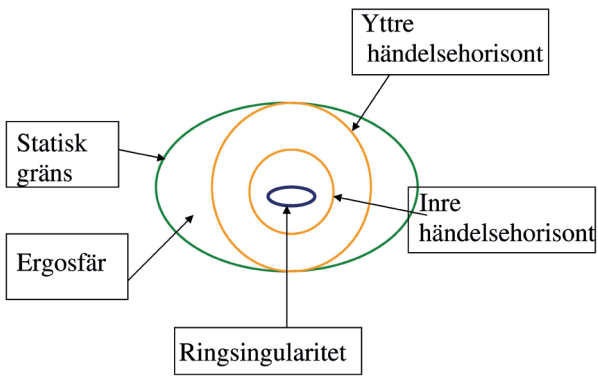
Partikeln dras med i rotationen och effekten blir större ju mindre avståndet r är.

Om stjärnan blir riktigt liten, som en neutronstjärna eller rent av kollapsar till ett svart hål, behövs en noggrannare lösning för att beskriva meddraggningseffekterna på små avstånd. Exakta lösningen för roterande svarta hål fanns av Roy Kerr 1963 och ges av:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1-\frac{2mr}{\Sigma}\right)c^2\,\mathrm{d}t^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}\,\mathrm{d}r^2 - \Sigma\,\mathrm{d}\theta^2 - \frac{A}{\Sigma}\,\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{4\,mar\sin^2\theta}{\Sigma}\,c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \quad ,$$

där $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $A = (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta$ och m och a är definierade som tidigare.

Ett roterande svart hål har i jämförelse med ett icke-roterande en ganska komplex struktur. Vid den statiska gränsen, som är den yta från vilken det gravitationella rödförskjutningen blir oändligt och ges av $\Sigma = 2mr$, blir meddraggningseffekten så stor att det inte längre är möjligt att motstå den ens med de starkaste motorer. För ett roterande svart hål är detta dock inte händelsehorisonten. Den första händelsehorisonten, där ljus fångas, finns vid $r = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ där $\Delta = 0$. Området mellan den statiska gränsen och händelsehorisonten kallas ergosfären. Den är alltså ett område som i en lös mening roterar snabbare än ljuset, men från vilket det ändå är möjligt att ta sig ut ifrån.



Figur 7: *Strukturen hos ett roterande svart hål. I ergosfären mellan den statiska gränsen och den yttre händelsehorisonten är meddragningseffekten så stark att det är omöjligt att förbli i vila. Innanför händelsehorisonterna finns singulariteten i form av en ring.*

Genom den s.k. Penrose-processen kan man faktiskt få en del av en partikel som passerar ergosfären att komma ut med högre energi än den hade före passagen. Tänk att en partikel faller in i

ergosfären och faller sönder i två bitar. Antag vidare att den ena biten faller in i det svarta hålet, medan den andra tar sig ut igen. Det hela kan arrangeras så att biten som kommer ut har högre energi än den ursprungliga hade. För att energin ska bevaras verkar det då som att den infallande biten har negativ energi. Nettoeffekten blir att energin tas från det svarta hålets rotationsenergi.

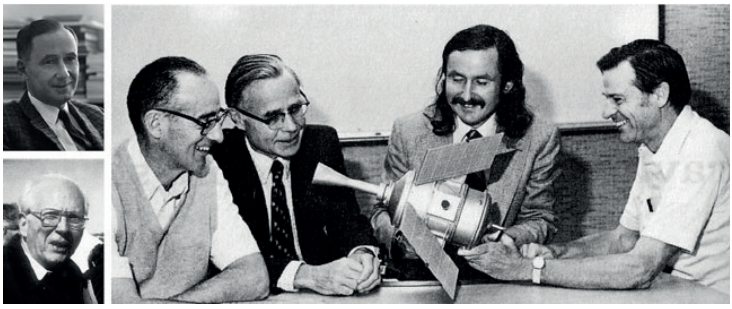
Efter den första händelsehorisonten finns ytterligare en vid den andra roten till $\Delta = 0$. Innanför den finns singulariteten som nu är ringformad. Till skillnad från singulariteten i Schwarzschildmetriken är det möjligt att undvika att träffa ringsingulariteten. Det är t.o.m. matematiskt möjligt att utvidga lösningen till att gälla för negativa r. Fysikaliskt sett innebär det att man kan passera genom den disk som har ringen som kant och komma in i en helt annan värld. Här finns slutna tidsartade kurvor. Det är banor i rumtiden längs vilka ens lokala egentid ständigt ökar, men som till sist återkommer till utgångspunkten i både rum och tid. Banorna kan t.o.m. deformeras så att man återvänder till utgångspunkten innan man startade! Så tidsmaskiner är alltså möjliga i det här området.

Rotationsparametern a begränsas troligen uppåt av m eftersom centrifugalkrafterna annars borde hindra en gravitationell kollaps till ett svart hål. Om a vore större än m skulle dessutom rotationsenergin vara större än den totala energin, som ges av m. Om värdet på rotationsparametern a ändå skulle överstiga m öppnas händelsehorisonterna längs rotationsaxeln. Singulariteten skulle då inte längre döljas för omgivningen, utan man får en s.k. naken singularitet. Enligt Roger Penrose hypotes om kosmisk censur döljs alla singulariteter bakom händelsehorisonter.

Gravity Probe B

Redan 1959 föreslog George Pugh, baserat på ett arbete av Leonard Schiff, ett experiment som skulle kunna mäta både meddraggningseffekten och den geodetiska effekten från jordens gravitationsfält. Projektet drevs sedan vidare av framför allt Francis Everitt, och 2004 kunde en satellit för Gravity Probe B-experimentet sändas upp. För att kunna mäta de två effekterna behövs instrument som kan behålla sin riktning med stor noggrannhet. Lämpliga sådana är gyroskop som spinner snabbt och som inte heller utsätts för några vridande moment.

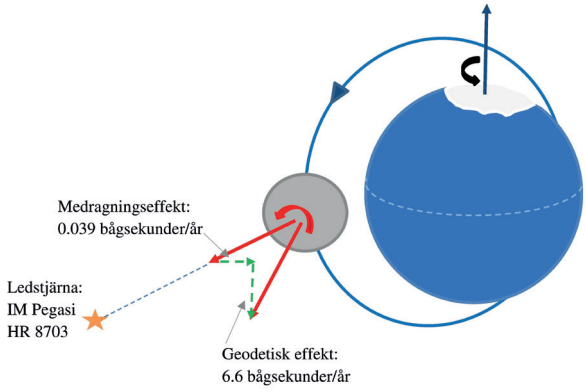
För ett gyroskop i en bana runt jorden på en höjd av 642 km är



Figur 8: *Leonard Schiff (överst till vänster), George Pugh (nederst till vänster) och Dan Debra, Bill Fairbank, Francis Everitt och Bob Cannon med en modell av Gravity Probe B 1980 [med tillstånd från James Overduin (2012)].*

medraggningseffekten p.g.a. jordens rotation ungefär 0,039 bågsekunder per år, men vi får inte glömma bort den geodetiska effekten. Som vi såg tidigare kommer en vektor som parallelltransporteras runt en kurva att ändra sin riktning i ett krökt rum. I det aktuella fallet är effekten 6,6 bågsekunder per år. Den geodetiska effekten är alltså ungefär 170 gånger större än meddragningseffekten, så hur ska vi kunna separera ut dem från varandra? Den mindre effekten borde ”drunkna” i den större. Problemet har lösts på ett snillrikt sätt. Eftersom meddraggningseffekten är vinkelrät mot jordens rotationsaxel, medan den geodetiska effekten är i banans plan låter man satelliten gå i en polär bana, dvs. från pol till pol! På så sätt blir de två effekterna vinkelräta mot varandra.

I Gravity Probe B används fyra klotformiga gyroskop av ungefär pingpong-bollars storlek (se artikelns ingressbild). De är närmast perfekt sfäriska; deras radier varierar med mindre än 10 nm. Om man förstorade upp ett sådant klot till jordens storlek skulle det högsta berget bli ungefär 2,4 m! För att minska växelverkan med omgivningen kyls den och gyroskopen ned till under två kelvin med hjälp av supraflytande helium. Kloten är gjorda av smält kvarts och klädda med ett tunt hölje av niob, som blir supraledande vid nedkylningen. Ett magnetfält parallellt med gyroskopets rotationsaxel genereras då, och det är med hjälp av det som gyroskopets riktning kan mätas. Satelliten innehåller också ett teleskop inställt mot en referenspunkt som ges av HR8703 eller IM Pegasi, som är en dubbelstjärna i stjärnbilden Pegasus.



Figur 9: *Geodetisk effekt och meddragningseffekt hos ett gyroskop som rör sig i en polär bana runt jorden. Den geodetiska effekten är i satellitbanans plan, medan meddragningseffekten är i jordens ekvatorialplan.*

Resultaten från experimentet publicerades i *Physical Review Letters* 2011. För den geodetiska effekten erhölls $6{,}6018 \pm 0{,}0183$ bågsekunder per år, som stämmer väl med förutsägelsen från allmän relativitetsteori. Tyvärr kunde man inte mäta meddragningseffekten med samma höga precision, men det erhållna medelvärdet på 0,0372 bågsekunder per år skiljer ändå med endast 5% från det teoretiska värdet på 0,0392 bågsekunder. Med felgränser erhölls värdet $0{,}0372 \pm 0{,}0072$, så det uppskattade felet i mätningarna är alltså runt 19%.

Effekten har också observerats under mer extrema förhållanden nära roterande svarta hål. Materia som har en tillräcklig stor transversell hastighetskomponent behöver inte falla in i det svarta hålet, utan kan hamna i en bana runt det. Så runt de svarta hålen samlas typiskt materia i heta uppsamlingsskivor, *accretion disks*, som strålar i röntgen-området. Om skivorna inte ligger exakt i ekvatorialplanet kommer de att precessera och då ge ifrån sig en karakteristisk periodicitet i röntgenstrålningen. Detta fenomen har observerats från bl.a. dubbelstjärnan GRO J1655-40, där ena komponenten verkar vara ett roterande svart hål på ca. 7 solmassor och rotationsparametern $a \approx 0{,}93\,m$. Det är nära det maximala värdet $a = m$. Att det svarta hålet roterar stöds också av att de innersta stabila banorna i skivan har mindre radie än motsvarande banor runt ett icke roterande svart hål.

Vad definierar ett tröghetssystem?

Newtons rörelselagar gäller i ett tröghetssystem. I ett accelererande system behöver man modifiera Newtons andra lag genom att lägga till de tröghetskrafter som uppstår. Antag att vi befinner oss på en karusell som roterar med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$. Vi känner då utåtriktade centrifugalkrafter och partiklar som rör sig relativt karusellen påverkas dessutom av Corioliskraften, som får deras rörelseriktning att vika av. Newtons andra lag går över i

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

i karusellens system.

Men vad roterar karusellen relativt? Även om karusellen hade ogenomskinliga väggar så att vi inte kunde se omgivningen skulle vi likväl känna av centrifugalkraften. Så vad bestämmer vad som är ett icke-roterande system? Kan det vara den omgivande materien? Newton menade att det inte var så, utan att det finns ett absolut system relativt vilket rörelser lyder under hans rörelselagar. För att belysa saken föreslog han ett tankeexperiment. Häng upp en vattenhink i ett rep. Först, om hinken inte roterar är vattenytan plan. Om vi sedan sätter rotation på hinken kommer till en början, innan friktionen mellan hink och vatten hunnit verka, vattenytan att vara plan och i vila. Med tiden kommer dock vattnet att rotera med hinken och ytan blir då buktig p.g.a. centrifugalkraften. Vi har alltså två olika situationer när hinken och vattnet är i vila i förhållande till varandra, men där hink-vatten-systemet i ena fallet är icke-accelererat och i det andra accelererat. Newton argumenterade utifrån detta att vad som är ett tröghetssystem inte har med kroppars relativa rörelser att göra, utan beror på att det finns ett föredraget system, det absoluta rummet.

Mot detta invände senare Ernst Mach (senare delen av 1800-talet). Han gillade inte tanken på ett absolut rum, utan menade att centrifugalkrafterna beror på någon form av växelverkan med den omgivande världen. Denna idé, kallad Machs princip, formuleras ofta som att det är den totala massfördelningen i universum som bestämmer vad som är ett tröghetssystem. En konsekvens av detta är att om vattenhinken vore ensam i universum skulle vattenytan inte bli buktig när hinken sätts i rotation eftersom det då inte skulle finnas någonting att relatera rotationen till. En alternativ formulering av Machs princip är då att universum som helhet inte kan rotera, och man därför skulle kunna använda de avlägsna

fixstjärnorna (eller med dagens mätnoggrannhet de avlägsna galaxerna) som riktpunkter för ett icke-roterande system. Newtons hink-experiment kan nu ses i ett annat ljus. Om vi var i vila relativt den plana vattenytan, och alltså var i ett icke-roterande system, skulle de avlägsna galaxerna inte röra sig på himlavalvet. Omvänt, om vi satte oss i vila relativt den buktiga ytan skulle vi se de avlägsna galaxerna snurra runt oss.

Einstein var inspirerad av Machs princip när han utvecklade allmän relativitetsteori i den meningen att teorin inte definierar något absolut rum. Acceleration definieras på olika sätt i Newtonsk gravitation och allmän relativitetsteori. Medan en partikel som faller i ett gravitationsfält ses som accelererad i Newtons teori, ser man i allmän relativitetsteorin en partikel som endast påverkas av gravitation som oaccelererad. Den faller fritt i gravitationsfältet och följer därför den rakast möjliga banan i rumtiden. Man kan se detta som en generalisering av Newtons första lag, som säger att en partikel som inga krafter verkar på rör sig med konstant hastighet. Gravitationen ses alltså inte längre som en kraft i samma mening som i Newtons teori, utan manifesterar sig istället i rumtidens struktur. Plats för något absolut rum finns inte i allmän relativitetsteori, men fritt fallande referenssystem, som är lokalt definierade, är de som föredras. Man skulle dock fortfarande kunna känna av tröghetskrafter associerade med rotation i ett sådant system, så för att få ett helt inertialt system måste systemet sedan ändå roteras så att alla tröghetskrafter försvinner.

Gödels universum

Kurt Gödel och Albert Einstein hamnade båda på *Institute for Advanced Studies* i Princeton och blev goda vänner. Gödel intresserade sig här för allmän relativitetsteori, och 1949 publicerade han en intressant kosmologisk lösning till fältekvationerna som dock kanske inte var vad Einstein hade önskat sig. Inte nog med att den strider mot Machs princip, den gör det också möjligt att resa bakåt i tiden!

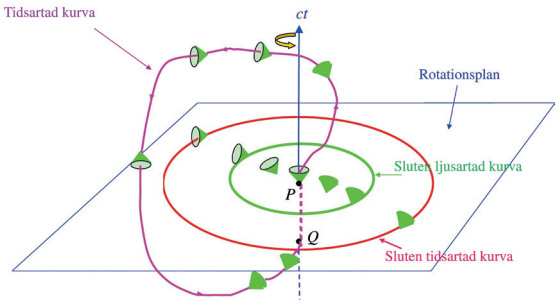
Gödels universum är en lösning till Einsteins ekvationer med en negativ kosmologisk konstant, i vilken hela universum roterar. Det innebär att en lokal observatör som inte roterar och betraktar de avlägsna galaxerna på himmelssfären ser dem rotera runt sig. Modellen beskriver dock ett universum som inte förändras med tiden. Den kan därför inte beskriva vårt observerade universum,

Figur 10: *Albert Einstein och Kurt Gödel (Foto Oskar Morgenstern, Institute for Advanced Study, Princeton.).*

som av allt att döma har en accelererande expansion som styrs av en positiv kosmologisk konstant. Men den lokala fysiken är helt ”normal” och beskrivs av en trycklös gas, s.k. damm. Därför är det ändå av intresse att studera modellen som en möjlig fysikalisk lösning till Einsteins ekvationer.

Modellen innehåller också slutna tidsartade kurvor. För någon som rör sig längs en tidsartad kurva ökar egentiden, dvs. den tid som mäts med en medföljande klocka. Eftersom kurvan är sluten kommer man till sist tillbaka till den punkt i rum och tid som man startade ifrån. Trots att den tid man själv upplevt kan vara lång har ingen tid alls förflutit på utgångspunkten. Det är t.o.m. möjligt att deformera kurvan så att man kommer tillbaka innan man startade! Nu är detta ingen lätt sak att åstadkomma. Kurvan är ingen geodet, dvs. det är inte bara att falla fritt. En raket som färdas längs kurvan måste ha motorerna på och enorma, men ändliga, mängder med bränsle skulle krävas.

Är nu detta möjligt? Vi förväntar oss att världen ska vara kausal, dvs. att orsak alltid kommer före verkan. I Gödels universum borde det t.ex. vara möjligt för oss att hindra de yngre upplagorna av oss själva från att ge sig iväg. Men då skulle vi ju aldrig komma fram. Om det ska vara möjligt verkar det som att vi måste ge avkall på den fria viljan, så att vi inte kan välja att stoppa resan. Skulle då världen vara helt deterministisk och hur går det ihop med kvantmekanikens osäkerhet? Kanske måste vi förkasta Gödels universum som en patologisk lösning till Einsteins ekvationer.



Figur 11: *Förhållandet* $\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{\omega^2}\left[\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 + \sinh^4 r - \sinh^2 r)\,\mathrm{d}\varphi^2 - 2\sqrt{2}\sinh^2 r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}t\,\right] - \mathrm{d}z^2$ *beskriver Gödels universum: Det har en väldefinierad rotationsaxel, som i de givna koordinaterna ges av* z*-axeln. I figuren ses rotationsplanet och* z*-axeln är undertryckt. I origo (P) där* $r = 0$ *försvinner korstermen* $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi$*. Den lokala tidsriktningen sammanfaller då med* t*–axeln, som är ritad vinkelrät mot rummet. När man avlägsnar sig från origo tippar ljuskonerna mer och mer och därmed den lokala tidsriktningen. Vid en viss radie tippar de över så mycket att de tangerar en sluten kurva. Eftersom ljus rör sig längs ljuskoner är det möjligt att skicka ljus längs kurvan. Ännu längre ut tippar ljuskonerna över så mycket att den lokala tidsriktningen ligger i planet och bildar en sluten tidsartad kurva. Det är alltså möjligt att komma tillbaka till den tid och plats man startade ifrån. Gödels universum är likadant överallt, så vi kan alltid se det som att vi startar från punkten P i bilden. Det innebär att den slutna tidsartade kurvan i rotationsplanet alltid ligger långt ut, på kosmologiska avstånd. En tänkbar tidsartad kurva som startar i P och återkommer till samma rumspunkt vid en tidigare tidpunkt, rumtidspunkten Q, visas i bilden.*

Gravitationsvågor

Låt oss betrakta svaga gravitationsfält, som geometriskt betyder att rumtiden är nära platt. I nästan kartesiska koordinater kan vi då skriva koefficienterna i metriken som

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

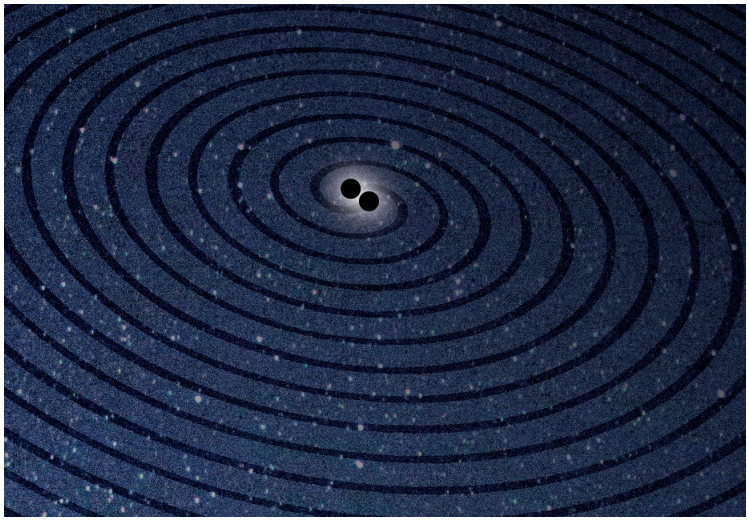
där $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Med $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{\eta^{\sigma\tau}}{2} h_{\sigma\tau} h_{\mu\nu}$ och under lämpliga val av koordinater ges då Einsteins ekvationer approximativt av:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad .$$

Vi får alltså en ekvation som är mycket lik den som Nordström föreslog, bortsett från att vi har fler frihetsgrader. Som tidigare tolkar

vi högersidan som källorna till gravitationsfältet. Om de inte har något tidsberoende kommer gravitationsfältet långt från källorna att falla av som $1/r^2$ som tidigare. Med tidsberoende hos källorna kommer vi i allmänhet att få termer som faller av som $1/r$ och som tolkas som gravitationsvågsstrålning.

Den här s.k. linearisera version av allmän relativitetsteori har stora likheter med elektromagnetismen. Elektromagnetiska vågor genereras av accelererade laddningar. I t.ex. radio- och TV-master skapas de utåtgående vågorna från oscillerande strömmar, dvs. accelererade elektroner. På liknande sätt sänder massor i relativ rörelse ut gravitationsvågor, som kan ses som små krusningar som fortplantar sig med ljushastigheten. Notera att det är själva rummet som ömsom dras ut och ömsom dras ihop.

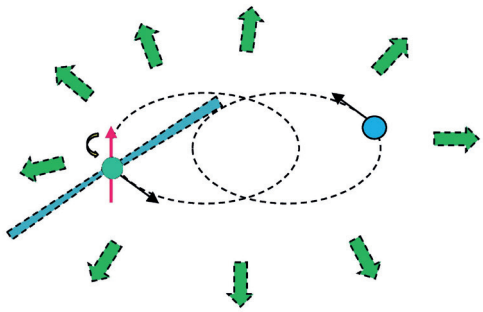


Figur 12: *Illustration av gravitationsvågor som rör sig bort likt ringar på vattnet från två kompakta objekt, t.ex. neutronstjärnor eller svarta hål, som roterar runt varandra i bildens centrum (grafik av Göran Durgé).*

Om man studerar lösningarna till Einsteins ekvationer närmare visar det sig att det är tidsberoendet hos källans avvikelse från sfärisk symmetri som bestämmer om gravitationsvågor bildas eller ej. Avvikelsen ges av det så kallade kvadrupolmomentet Q_{ij}. Effekten som gravitationsvågor emitteras med ges av den berömda kvadrupolformeln:

$$P = \frac{G}{45c^5} \frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \quad .$$

Det första indirekta stödet för gravitationsvågor kom från observationerna av dubbelpulsaren PSR 1913+16. Den består av två neutronstjärnor som rör sig runt sitt gemensamma masscentrum på ca. 8 timmar. En av stjärnorna är en pulsar, som roterar snabbt runt sin egen axel (med frekvensen 16,9 Hz) och sänder ut elektromagnetisk strålning längs två smala koner.



Figur 13: *Två neutronstjärnor rör sig runt sitt gemensamma masscentrum. En av dem är en pulsar, som sänder ut elektromagnetisk strålning längs två smala koner. Systemet sänder också ut gravitationsvågor, illustrerat med de utåtgående pilarna.*

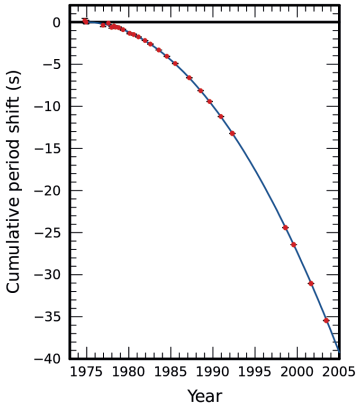
Jorden sveps över av den ena konen en gång per rotation runt den egna axeln och det ger en så pass god klocka att banan har kunnat kartläggas i detalj. Det visar sig att periodtiden i banan minskar och att stjärnorna rör sig i spiral mot varandra. Systemet tappar energi i mycket god överensstämmelse med förutsägelserna från allmän relativitetsteori. Minskningen i periodtid som funktion av år visas tillsammans med den teoretiska kurvan i Figur 14. För det här resultatet belönades Russel Hulse och Joseph Taylor med Nobelpriset 1993. Värt att nämna är också att fler banparametrar än vad som behövs för att bestämma banorna uppmätts. Det innebär att flera andra test av allmän relativitetsteori kunde göras.

Frågan är nu om och hur vi kan mäta gravitationsvågorna direkt. Vågorna från dubbelpulsaren är mycket svaga och har dessutom för låg frekvens (ca. 4×10^{-4} Hz) för att kunna mätas på jorden med dagens detektorer.

Gravitationsvågornas utbredning i vakuum ges av vågekvationen:

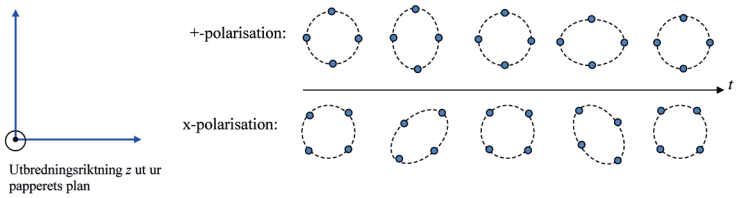
$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Vågorna är transversella, vilket innebär att svängningarna sker i



Figur 14: *Minskningen av periodtiden för PSR 1913+16 som funktion av tiden. Den heldragna kurvan ger förutsägelsen från allmän relativitetsteori (Bild från Wikipedia, Inductiveload — Public Domain).*

ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen. Elektromagnetiska vågor har två oberoende polarisationer och detsamma gäller för gravitationsvågor. I Figur 15 visas hur en gravitationsvåg som rör sig i z-riktningen påverkar en uppsättning testmassor i xy-planet för de två olika linjärpolarisationerna $+$ och $\times$. Vi antar att testmassorna faller fritt i en satellit så att vi inte behöver bekymra oss om jordens gravitationsfält.



Figur 15: $+$ *och* $\times$ *polarisation för linjärpolariserade gravitationsvågor, vars utbredningsriktning är vinkelrät mot papperets plan. Betrakta först* $+$*-polarisationen. I utgångsläget ligger testmassorna i en ring. Sedan dras rummet ihop i* x*-led och ut i* y*-led. I nästa steg är vi tillbaka till utgångsläget och därefter byts vilka riktningar som dras ut respektive dras ihop.* $\times$*-polarisationen är vriden 45° relativt* $+$*-polarisationen.*

Som ett mått på gravitationsvågens styrka kan vi ta den relativa längdändringen

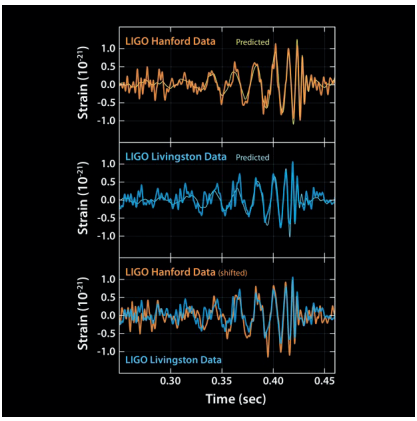
$$h = \frac{\Delta l}{l} \quad ,$$

som vi kallar h eftersom den ger magnituden av $h_{\mu\nu}$. De h-värden vi kan förväntas mäta från astrofysikaliska objekt är som sagt mycket små. Som vi ska se har dock gravitationsvågor detekterats och de bästa detektorerna kan idag mäta relativa längdändringar på 10^{-23}!

En pionjär inom utvecklandet av gravitationsvågsdetektorer var Joseph Weber. Han använde sig av resonansstavar som börjar svänga om de träffas av gravitationsvågor. Om gravitationsvågens frekvens överensstämmer med en egenfrekvens hos staven kan amplituden hos stavens svängningar förstärkas kraftigt. Vidarutveckling av resonansdetektorer pågår och känsligheten är runt 10^{-21} för de bästa. En nackdel med dem är att de har smal bandbredd eftersom de bygger på vissa resonansfrekvenser. Mer framgångsrika har laserinterferometrar varit. De laserinterferometrar som används i LIGO och Virgo beskrivs mer i detalj i Aleksandra Foltynowicz artikel i denna volym av Kosmos.

Den 14:e september 2015 uppmätte LIGOs två anläggningarna signaler som är så lika att de bör komma från samma källa, se Figur 16. Profilen på signalerna överensstämmer med vad man förväntar sig från slutfasen av en process där två svarta hål som rör sig runt varandra till sist sammansmälter i ett svart hål. De något ljusare kurvorna i de två första diagrammen visar de teoretiska beräkningar som bäst kan anpassas till mätdata. Avståndet till de svarta hålen har uppskattats till 1,3 miljarder ljusår. Deras massor var ca. 36 och 29 solmassor, och det slutliga svarta hålet massa blev på 62 solmassor. Skillnaden på 3 solmassor omvandlades till energi i gravitationsvågor och är ungefär 20 gånger mer än en supernova totalt frigör. Rainer Weiss, Barry Barish och Kip Thorne tilldelades 2017 års Nobelpris för utvecklandet av LIGO-detektorn och observationen av gravitationsvågor.

Under 2017 startade ytterliggare en gravitationsvågsdetektor, Virgo utanför Pisa, och den 14:e augusti uppmätte alla tre detektorerna en signal från två sammansmältande svarta hål. Man kunde nu med hjälp av triangulering även bestämma varifrån på himlavalvet som signalen kom. Bara tre dagar efter det uppmättes en något annorlunda signal. Den var svagare men varade längre, ca 100 sekunder. I det här fallet verkade det istället vara fråga om två sammansmältande neutronstjärnor. Eftersom man med tre detektorer kunde lokalisera signalen, så kunde man undersöka om det också fanns elektromagnetiska signaler från objektet. Strålning



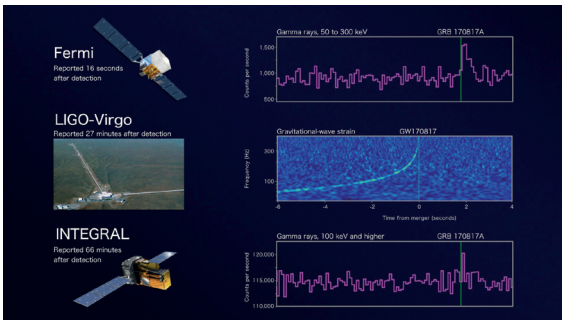
Figur 16: *Den första detektionen av gravitationsvågor, GW150914. Bilderna visar amplitud som funktion av tid. Övre bilden ger signalen vid Hanford och den mellersta signalen vid Livingston. De något mörkare och spetsigare kurvorna i de två övre diagrammen ger de uppmätta värdena. Styrkan var som mest ca.* 10^{-21} *m och signalerna varade i ca. 0,2 sekunder. De anlände med 7 ms mellanrum, vilket är kompatibelt med att de rör sig med ljushastigheten, och i nedre bilden är signalerna överlagrade efter en förskjutning på 7 ms för den ena. Som synes överensstämmer de mycket väl (från Caltech/MIT/LIGO Laboratory).*

inom hela det elektromagnetiska spektret registrerades från platsen för händelsen, bl.a. observerades ett utbrott av gammastrålning med rymdteleskopen Fermi och INTEGRAL. Från de spektra som togs upp kunde man också se tecken på att tyngre grundämnen än järn[5] hade bildats genom neutroninfångning. Händelsen kunde också fotograferas i det synliga området. Efter de första detektionerna av gravitationsvågor har sedan många observationer av sammansmältande kompakta objekt gjorts som gett oss mycket information om de bakomliggande fysikaliska processerna.

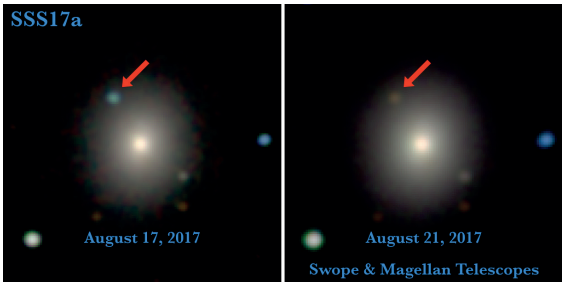
Slutord

Under senare år har allmän relativitetsteori förvandlats från en mestadels teoretisk del av fysiken till att alltmer bli bekräftad av

[5]Stjärnor producerar energi genom fusion, som är en sammanslagning av lättare atomkärnor till tyngre. Energi kan utvinnas upp till bildandet av järn, men för tyngre ämnen kräver fusionsprocessen energi. Därför upphör fusionen efter järn. Tyngre grundämnen kan sedan bildas genom neutroninfångning efterföljt av β-sönderfall.



Figur 17: *Signalerna från händelsen GW170817. Gravitationsvågen detekterades av LIGO-Virgo och gammablixten av Fermi och INTEGRAL (från Caltech/MIT/LIGO Laboratory).*



Figur 18: *Den optiska bilden av källan till GW170817 i galaxen NGC 4993 (Från 1M2H/UC Santa Cruz and Carnegie Observatories/Ryan Foley).*

olika experiment och observationer. Vi har här sett hur mycket små effekter p.g.a. jordens rotation har kunnat mätas med Gravity Probe B och hur ytterst små amplituder hos gravitationsvågor har kunnat registreras med LIGO och Virgo. Många andra verifikationer har gjorts, som t.ex. de studier av stjärnor nära Vintergatans centrum som visar att ett gigantiskt svart hål styr deras rörelser och som belönades med 2020 års Nobelpris. Men utöver att allmän relativitetsteori blir mer och mer bekräftad, har den också lett till nya mätmetoder. Till exempel har gravitationsvågsdetektorer redan hunnit bli ett astronomiskt mätinstrument vid sidan av de teleskop som mäter strålning i det elektromagnetiska spektrumet.

❖

Vidare läsning

Andersson, N. (2019). *Gravitational-wave astronomy: Exploring the dark side of the Universe*. Oxford University Press.

Hartle, J. B. (2021). *Gravity — An Introduction to Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press.

Overduin, J. (2012). *The Experimental Verdict on Spacetime from Gravity Probe B*. Springer-Verlag.

Schutz, B. (2009). *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press.