

SÄRTRYCK UR:

# KOSMOS

## FYSIKENS MYSTERIER

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS ÅRSBOK 2019

# KVANTMÄTNINGAR OCH TERMALISERING

© JENS H BÅRDARSON



Artikeln publiceras under Creative Commons-licensen CC BY-NC-SA 4.0  
För bildmaterial med källhänvisning  
gäller samma upphovsrättsliga  
regler som för källan.

*f* SVENSKA  
FYSIKER  
SAMFUNDET

*b is any parameter  
parametrising the curve*



### Jens H Bárðarson

är lektor i fysik vid Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm. Han gjorde sin grundutbildning i Reykjavik och disputerade vid Leidens universitet. Innan han kom till KTH år 2016 arbetade han vid *Cornell University*, *University of California Berkeley*, och *Max Planck Institute for the physics of complex systems* i Dresden. Hans forskargrupp fokuserar på kvantmaterialens fysik.

Kvantfysikens sätt att beskriva verkligheten skaver på många sätt mot den klassiska fysikens lagar. Ändå måste den klassiska makrofysiken på något sätt följa ur den mer fundamentala kvantfysiken. Jens H Bárðarson beskriver här detta problem när det gäller termalivering av stora system. Kanske pekar lösningen i detta fall på ett mer allmänt sätt att betrakta frågor om kvant kontra klassiskt?

*Bilden: Tyler Nix/Unsplash*

# Kvantmätningar och termalisering

Jag undervisar i kvantmekanik på avancerad nivå. Jag brukar då börja med att presentera teorins grundläggande antaganden. För det första, att ett systems tillstånd beskrivs av en speciell sorts vektor, som Paul Dirac betecknade  $|\psi\rangle$  och som vi kan kalla vågfunktion. För det andra, att varje linjärkombination av tillståndsvektorer också är ett möjligt tillstånd. Ett välkänt exempel på detta är Schrödingers katt som är både levande och död på samma gång:  $|\text{katt}\rangle = |\text{levande}\rangle + |\text{död}\rangle$ . Detta är en konstig egenhet hos kvantmekaniken, men inte särskilt kontroversiell. Men sedan, i min genomgång av teorins grunder, kommer jag till hur en mätning av ett kvanttillstånd fungerar. Som jag själv en gång lärt mig, skriver jag ned som postulat att en mätning leder till ”kollaps av vågfunktionen”: i det ögonblick jag mäter Schrödingers katt blir den antingen  $|\text{levande}\rangle$  eller  $|\text{död}\rangle$ . Den invasiva naturen hos en kvantmätning – ett ”*både och*” blir till ett ”*antingen eller*” – är ett grundläggande inslag i kvantmekaniken. Men med kvantmätningen bryts också determinismen och tidens pil framträder.

Denna egenskap hos kvantmekaniken gör den omåttligt populär i New Age-kretsar, där teorin åberopas för att förklara många fenomen som annars tycks oförklarliga. Härromdagen läste jag en recension av Sam Harris bok om fri vilja, och någon skrev att Sam helt hade missat att allt förklarades av kvantmekanikens indeterminism, och att Sam skulle göra klokt i att läsa en bok i kvantmekanik innan han skrev mer. Jag fick mig ett gott skratt (och jag tvivlar inte på att Sam känner till elementär kvantmekanik). Men vågfunktionens kollaps är också omdebatterad bland fysiker, och när jag skrev ner teorins postulat och lärde ut dem till mina studenter, insåg jag att det verkade som att författaren till den bok vi använder i kursen (som för övrigt är en bra bok) inte är särskilt förtjust i kollapsen.

Nästan två årtionden efter att jag först hörde talas om vågfunktionens kollaps har jag internaliserat den, och upphört att ifrågasätta den. Utan att riktigt ha funderat igenom saken kände jag mig säker på att det hela kunde förklaras på ett tillfredsställande sätt med hjälp av så kallad *dekoherens*, något som förespråkats bland annat av Wojciech Zurek. I korta drag innebär detta att systemets tillstånd under en mätning blir starkt *sammanflätat* (eller *snärjt*) med vissa tillstånd i mätinstrumentet, vilket sedan leder till mätresultatet. Jag började förbereda mig inför att förklara detta för mina studenter, men insåg snart att det fanns hål i resonemang-  
et, luckor som jag inte övertygande kunde förklara. När jag såg att Steven Weinberg i sin *Introduction to Quantum Mechanics* når samma slutsats, strök jag den diskussionen från min föreläsning.

Vid denna punkt bör jag påpeka att kvantmekanik är den mest framgångsrika naturvetenskapliga teori som någonsin formulerats. Som A. Douglas Stone skriver i sin bok, *Einstein and the Quantum*:

*”Quantum mechanics explains the periodic table of the elements, the nuclear reactions that power the sun, and the greenhouse effect that leads to global warming. The quantum theory of radiation and electrical conduction underlies all of modern information technology.”*

Vi kvantfysiker använder teorin dagligen för att göra förutsägelser om mätresultat och för att beskriva naturfenomen. Och postulatet om vågfunktionskollapsen – introducerat av Werner Heisenberg och sedan införlivat i en matematisk formulering av kvantmekaniken av John von Neumann – fungerar helt enkelt, åtminstone för praktiska ändamål. Vi tenderar att bli förvirrade av det, men mest första gången vi stöter på det; vi funderar en stund över dess betydelse, bara för att så småningom sluta grubbla, och sedan hålla tyst om saken och göra våra beräkningar. Så fortsätter vi att räkna tills vi glömt att där någonsin fanns något att oroa sig över. (Jag är säker på att det döljer sig en lektion om livet någonsin in den här processen.)

En anledning till att vi inte har varit tvungna att oroa oss så mycket över detta kvantmättningsproblem är kanske att kvanteffekter i viss mening bara blir viktiga vid låga temperaturer och på små

skalor. (Detta är dock inte helt sant; till exempel kan magnetism inte fullständigt förklaras utan att återopa kvantmekanik.) Nästan alla mätinstrument är mycket stora i förhållande till de skalor som är relevanta för kvantmekanik, och kan därför betraktas som ”klassiska”. Detta gör att vi för det mesta kommer undan med att separera världen i två delar, kvant och klassisk, och att vi kan tänka på våra mätinstrument som svarta lådor, som på något magiskt sätt implementerar Heisenbergs och von Neumanns vågfunktionskolaps vid mätning. Jag vill betona att detta inte ska förstås som att klassisk mekanik inte ingår i kvantmekanik. Idag tror vi – kanske till skillnad från många som spekulerade över frågan i kvantmekanikens barndom – att världen faktiskt är helt ”kvantmässig” (dvs. att den i princip fullständigt beskrivs av kvantmekanik) och att klassiskt beteende bara är ett emergent drag hos tillräckligt stora föremål (som mätapparater). Den skenbara separationen av världen i kvant och klassisk är endast en praktisk konstruktion, som underlättar för oss när vi ska tillämpa kvantmekaniken, men den avspeglar ingen principiell åtskillnad. Världen är i grunden kvantmekanisk, och det klassiska beteendet är något som vi förväntar oss ska följa ur teorin.

Detta leder förstås direkt till frågan om hur klassisk mekanik i så fall uppstår från kvantmekanik, och det är just den frågan jag vill diskutera här. Det är en fråga med lång och fascinerande historia som går tillbaka till kvantmekanikens tidiga dagar. Men det är först nyligen som vi har börjat få ett tydligare svar på den. Frågan har ställts i många olika former; några av dem besvarades relativt snabbt. Men en version av problemet tycktes leda till en motsägelse; den ignorerades eller glömdes snabbt – eller avfärdades som irrelevant.

### Termaliseringsdilemma

Problemet handlar om hur *den statistiska mekaniken* – den mycket framgångsrika teorin bakom termodynamiken – uppstår ur kvantmekanik. Som jag förklarade för mina studenter, beskrivs fysiska tillstånd som vektorer i en typ av vektorrum som kallas *Hilbertrum*. Efter Dirac betecknar vi ofta dessa vektorer  $|\psi\rangle$ , men för att ha något mer konkret i åtanke kan vi tänka på  $|\psi\rangle$  som en stor vektor  $|\psi\rangle = \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$  där komponenterna  $\psi_i$  är komplexa tal. T står för transponering så att  $\psi$  faktiskt är en komplex kolumnvektor. Men vi kan även uttrycka tillståndet för ett system

i form av en matris  $\rho$ , som ibland kallas tillståndoperator (eng. *state operator*), ibland täthetsmatris (eng. *density matrix*). Dirac skulle skriva denna täthetsmatris  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , men i vår vektornotation är den helt enkelt  $\rho = \psi \cdot \psi^{*T}$ . En täthetsmatris som denna, som uppstår från ett enda känt kvanttillstånd, kallas *ren*. Under tidsutveckling beskrivs systemets tillstånd alltid av en enda vektor, dvs. ett kvantmekaniskt tillstånd som är rent från början förblir rent hela tiden (se sidorutan).

En fördel med att uttrycka kvanttillstånden som täthetsmatriser, är att dessa även kan beskriva tillstånd som inte är helt kända. Antag till exempel att det enda vi vet är att systemets tillstånd är  $\rho_1$  med sannolikhet  $p_1$  och  $\rho_2$  med sannolikhet  $p_2$  (där förstås  $p_1 + p_2 = 1$ ). Då kan vi beskriva systemets tillstånd som en viktad summa av de två täthetsmatriserna  $\rho_1$  och  $\rho_2$ , dvs. med täthetsmatrisen  $\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ . Sådana täthetsmatriser, som uppstår genom möjligheten till mer än ett tillstånd, kallas *blandade*. En täthetsmatris är alltid antingen ren eller blandad – den kan aldrig vara båda samtidigt. Täthetsmatriser som beskriver termiska tillstånd är alltid blandade, eftersom de kan betraktas som summor av (rena) tillstånd viktade med Boltzmann-faktorn  $e^{-\beta E}$  (se sidorutan).

Detta leder till ett mysterium: ett kvantmekaniskt tillstånd är hela tiden rent, medan termiska tillstånd som beskrivs av statistisk mekanik är blandade vid vilken temperatur som helst större än noll (vi använder Kelvinskalan där temperatur noll är lika med den absoluta nollpunkten  $-273,15$  °C). Vid en första anblick tycks vi ha stött på en olöslig motsägelse. Om kvantmekaniken verkligen beskriver världen måste statistisk mekanik framträda från den i någon lämplig gräns – en möjlighet som tycks vara utesluten.

### Vad säger experimenten?

Dilemmat noterades redan under kvantmekanikens första år, men glömdes sedan i stort sett bort. Jag gissar att det var lätt att bortförklara motsägelsen genom att – i likhet med hur man ofta hanterade mätproblemet – åberopa skillnaden i skala mellan de klassiska stora systemen och de kvantmekaniska mycket små. Termodynamiska system är ju per definition system med ett mycket stort antal partiklar, vilket gör det svårt att bibehålla systemens kvantkoherens under lång tid. Därför orsakade detta problem inte särskilt mycket oro, och det var i varje fall ingenting som kunde undersökas experimentellt. Fysikerna gick därför vidare, som så ofta sker, till mer pressande frågor.

## Täthetsmatriser – några matematiska detaljer

Som beskrivs i huvudtexten, är en täthetsmatris  $\rho$  en komplex  $n \times n$  matris som ger en alternativ beskrivning av kvanttillstånd istället för tillståndsvektorer  $\psi$ . Rena täthetsmatriser uppstår från ett enda kvanttillstånd  $\rho = \psi \cdot \psi^{*T}$ . Eftersom  $\psi$  är normerad så att  $|\psi|^2 = 1$ , följer att  $\rho^2 = \rho$  för sådana rena täthetsmatriser. Om vi nu förbereder ett system i tillstånd  $\psi_0$  vid tiden  $t=0$  kommer det utvecklas enligt Schrödingerekvationen: vid tiden  $t$  kommer systemets tillstånd att vara  $\psi(t) = U(t) \psi_0$ . Här är  $U$  en komplex  $n \times n$  matris som kallas *tidsutvecklingsoperatoren*; enligt Schrödingerekvationen måste den vara *unitär*:  $U \cdot U^{*T} = 1$ . Den fysikaliska innebörden av detta matematiska villkor är att rena tillstånd alltid utvecklas in i rena tillstånd. Dvs. om  $\rho_0 = \psi_0 \cdot \psi_0^{*T}$  var ren vid tiden  $t=0$ , så kommer  $\rho(t) = \psi(t) \cdot \psi(t)^{*T}$  också vara ren vid alla tider  $t$ . Att så är fallet följer ur att

$$\rho(t) = U \psi_0 \cdot \psi_0^{*T} U^{*T}$$

vilket ger

$$\rho(t)^2 = U \psi_0 \cdot \psi_0^{*T} U^{*T} U \psi_0 \cdot \psi_0^{*T} U^{*T} = U \rho_0^2 U^{*T} = U \rho_0 U^{*T} = \rho(t)$$

I den andra likheten använde vi att  $U^{*T}U = 1$  (dvs. unitaritet) och att  $\psi_0 \cdot \psi_0^{*T} \psi_0 \cdot \psi_0^{*T} = \rho_0^2$ . Slutsatsen är att kvantmekaniska tillstånd som är rena från början förblir rena för alltid.

*Blandade* täthetsmatriser kan alltid uttryckas som statistiska blandningar av rena täthetsmatriser, dvs. som

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i$$

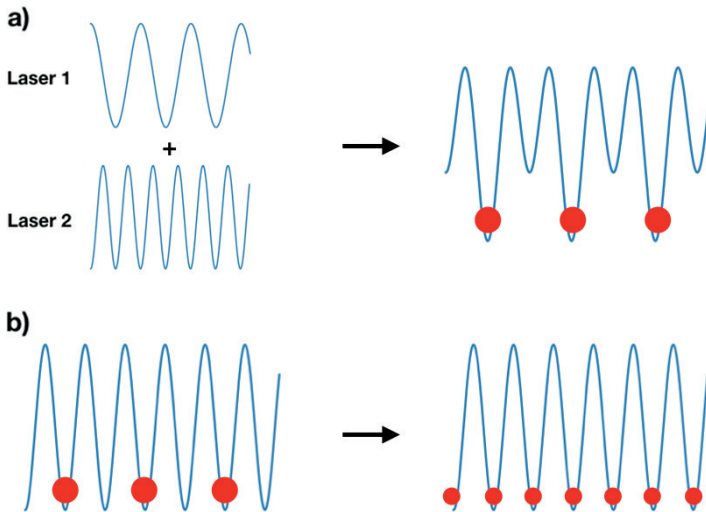
där  $p_i$  är sannolikheten för tillstånd  $\rho_i$ , och där summan av alla  $p_i$  är lika med 1. Blandade täthetsmatriser uppfyller i stort sett samma egenskaper som rena täthetsmatriser, förutom att  $\rho^2 \neq \rho$ . Till exempel, om täthetsmatriserna  $\rho_i$  som ingår i summan är ortogonala (dvs.  $\rho_i \rho_j = 0$  för  $i \neq j$ ) så får vi att

$$\rho^2 = \sum_{ij} p_i p_j \rho_i \rho_j = \sum_i p_i^2 \rho_i \neq \sum_i p_i \rho_i = \rho$$

eftersom  $p_i^2 \neq p_i$  om  $0 < p_i < 1$ . Ett exempel på detta är de termiska täthetsmatriser som uppstår inom statistisk mekanik. I en bas av energiegenvektorer är täthetsmatrisen som beskriver ett termiskt tillstånd diagonal, med diagonala element som (frånsett normering) ges av Boltzmann-faktorn  $e^{-\beta E_i}$  där  $E_i$  är energin för tillstånd  $i$ , och  $\beta = (k_B T)^{-1}$  där  $k_B$  är Boltzmanns konstant och  $T$  temperaturen. Vid varje  $T > 0$  uppfyller ett sådant termiskt tillstånd att  $\rho^2 \neq \rho$ .

Idag är läget ett annat. Två betydande framsteg inom modern (kvant)teknologi har gjort att dessa frågor hamnat i förgrunden inom fysikforskningen. Det första är den enorma ökningen av beräkningskraft, vilket gör att vi numera på en (klassisk) dator rutinmässigt kan simulera kvantsystem så stora att de närmar sig termiska system. Det andra framsteget är den oerhörda utvecklingen inom kvantteknologi och experimentell kvantfysik: det är nu möjligt att skapa och undersöka stora isolerade kvantsystem i labbet. Ett exempel är ultrakalla atomsystem, där gasens atomer hålls på plats och manipuleras med hjälp av lasrar. Atomerna kan kylas ner så mycket – ofta till temperaturer under  $1 \mu\text{K} = 0,000001 \text{ K}$  – att de hamnar i ett kollektivt kvanttillstånd.

I ett typiskt experiment bereds tillståndet för de många atomerna i den ultrakalla gasen i ett enkelt icke-jämviktstillstånd, till exempel genom att sätta på en stark laser som begränsar atomer-



Figur 1: Med hjälp av stående vågor av laserljus kan man skapa periodiska potentialer för atomer: buken i den stående vågen fungerar effektivt sett som potentialgropar för atomerna. (a) Vågor från två olika lasrar med olika våglängd läggs samman och ger upphov till en periodisk potential, där varannan dal är djupare. Atomer (röda prickar i figuren) kyls ner så mycket att de begränsas till de djupaste dalarna. (b) En av lasrarna stängs av, och det uppstår ett icke-jämviktstillstånd, med atomer bara i varannan dal. Atomer har nu en liten sannolikhet att tunnla till intilliggande dal, och efter lång tid erhålls ett termiskt tillstånd där atomerna (dvs. deras vågfunktioner) är jämnt fördelade i alla dalar.



na till ett gitter av åtskilda positioner (se figur 1). När den starka lasern sedan stängs av kan atomerna börja röra sig, och börjar då att kollidera med varandra. Enligt vår klassiska intuition borde de sedan, efter tillräckligt lång tid (som i praktiken oftast är mycket kort), nå ett termiskt tillstånd. Som analogi kan vi tänka på när mjölk hälls ner i svart kaffe: det initial icke-jämviktstillståndet motsvarar det svarta kaffet med lite mjölk i här och där precis efter att mjölken hälldes i. Detta tillstånd utvecklas sedan i tiden, och när så småningom det termiska tillståndet där kaffet och mjölken är helt blandade. Det fantastiska är att motsvarande faktiskt också sker i kvantsystemet i experimentet: efter en relativt kort tid når atomgasen ett termiskt blandat tillstånd.<sup>1</sup>

Så vad gick fel här? Hur kunde kvantsystemet – som måste ha följt unitär dynamik och därför förblivit rent under hela förloppet – ändå lyckas termalisera till ett blandat tillstånd, när det som det verkar inte skulle kunna göra det? Eller kanske borde vi istället fråga oss vad som gick rätt? Termalivering är trots allt vad vi intuitivt förväntar oss ska ske – det hade varit mycket konstigare om systemet inte termaliserades.

## Två vänner med varsin insikt

Svaret på frågan, oavsett hur den ställs, bygger på banbrytande arbeten av två gymnasievänner från *Fasori Gimnázium* i Budapest: Eugene Wigner och John von Neumann (ja, samme von Neumann som i kvantmätningens problemet). Wigner och von Neumann studerade båda på denna skola omkring 1915 där de handledes av den legendariske läraren László Rátz (figur 2). Rátz gav von Neumann privata lektioner och vägrade att ta betalt för dem, trots att von Neumanns far var



Figur 2: László Rátz (1863–1931), legendarisk och uppskattad lärare till bland annat Eugene Wigner och John von Neumann.

<sup>1</sup> Detta är det generiska beteendet; det finns några väldigt intressanta undantag, till exempel integrerbara system som inte är kaotiska, och något som kallas *mångpartikel-lokalisering*. Inga av dessa fall finns dock utrymme att ta upp här.

bankir som hade haft råd att betala. Han gav Wigner böcker att läsa och tände hans passion för matematik och fysik. Senare i livet skulle Wigner, som fick Nobelpriset i fysik 1963, ha ett fotografi av Rátz på väggen i sitt arbetsrum. Så stark kan en motiverad lärares inverkan på sina elever vara, något som sällan uppmärksammas eller ges erkännande för.

Von Neuman var kanske den mest inflytelserika av dem som hade studerat vid *Fasori Gimnázium*, men även Wigner hade en fantastisk karriär inom kvantfysiken. Han är till exempel känd för att ha betonat symmetriens roll inom fysiken, och för att ha introducerat gruppteoretiska tekniker i kvantmekanik – inslag som idag är helt centrala för ämnesområdet. Wigner uppskattade faktiskt von Neumann mer än någon annan fysiker som han kände, inklusive Dirac och Einstein. Med tanke på detta är det en intressant ingrediens i historiken kring termalivering, att von Neumann skrev en artikel redan 1929 som i själva verket löste termaliseringsgåtan. Men av någon anledning uppmärksammades inte detta arbete, och artikeln föll i glömska. Den återupptäcktes nyligen, och översattes då från den ursprungliga tyskan för att publiceras år 2010 i *The European Physical Journal H*. Vid det laget hade dock mysteriet mer eller mindre lösts igen av andra.

Så vad var det Wigner och von Neumann insåg? Låt oss börja med Wigner. Under kvantmekanikens första år försökte han att förstå energinivåerna i atomkärnor, och kärnornas emissionslinjer. För små kärnor och låga energinivåer kunde man begripa deras spektra från lösningen till Schrödingerekvationen. Men när kärnorna blir stora och man tittar på höga energinivåer, blir strukturen hos deras spektra så komplicerad att det verkar omöjligt att få ut något av dem: de verkar väsentligen slumpmässiga. I antingen desperation eller ett ögonblick av lysande insikt föreslog Wigner att lämna Schrödingerekvationen därhän, och istället modellera energinivåerna med en helt slumpmässig matris, enbart begränsad av problemets symmetrier. Och hör och häpna – fördelningen av avstånden mellan atomkärnornas energinivåer visade sig vara väsentligen identisk med fördelningen av egenvärden hos en slumpmässig matris! Detta var födelsen till det vi idag kallar slumpmatristeori (eng. *Random Matrix Theory*, *RTM*), med många tillämpningar inom fysik, matematik och flera andra ämnen. På sätt och vis påminner detta om essensen i statistisk fysik: ge upp försöken att modellera den individuella rörelsen hos varje

enskild partikel i exempelvis en gas med många partiklar, och modellera istället bara deras statistiska egenskaper. För många viktiga frågor är detta mer än tillräckligt, eftersom de flesta observabler ändå bara är medelvärden över många partiklar. Som en följd av Wigners slumpmatristeori modelleras tillstånden  $\psi$  (eller  $|\psi\rangle$ ) för sådana komplicerade system av en slumpmässig vektor: välj helt enkelt komponenterna i vektorn  $\psi$  slumpmässigt, så att du får en slumpmässig vektor  $\psi_{\text{RMT}}$ . Detta är den första insikten.

Von Neumanns insikt var att det inte är tillstånd som termaliserar, utan det är observabler som gör det. Detta är en mycket viktig distinktion. Vi har ju hävdad att tillståndet  $\psi$  (eller  $\rho$ ) i sin helhet inte kan bli termiskt, och detta är också sant. Men det vi faktiskt mäter är aldrig hela tillståndet, eftersom det är omöjligt att göra (utom för väldigt små system). Istället är det vi mäter en observabel, till exempel den lokala tätheten av partiklar. Sådana mätningar undersöker alltid bara en liten del av hela systemet – de är lokala mätningar – och ger oss aldrig information om systemet som helhet. Tänk på alla mätinstrument som du kan komma på – termometrar, tryckmätare, voltmeter, et cetera. Alla undersöker de systemet endast lokalt i en liten region. Detta innebär att det som är relevant för en faktisk mätning inte är den fullständiga täthetsmatrisen för ett system, utan bara en liten del av den, nämligen den del som är relevant för den lokala observabeln ifråga. Denna del kallas för *reducerad täthetsmatris*, och den erhålls genom att summera (”spåra ut”) alla de frihetsgrader som inte ingår i det undertrum vi betraktar. Vi betecknar detta  $\rho_A = \text{tr}_A \rho$ , där  $A$  är undertrummet och  $\bar{A}$  är resten av rummet. Om vi har  $\rho_A$  kan vi beräkna väntevärdet för alla lokala observabler till  $A$ . Von Neumanns argument var att det bara är sådana observabler till  $A$  som termaliserar, och därför är det enda som behövs att den reducerade täthetsmatrisen  $\rho_A$  blir blandad (dvs. att  $\rho_A^2 \neq \rho_A$  som förklaras i sidorutan på sid 121) och väsentligen ekvivalent med den termiska täthetsmatrisen ( $\rho_{\text{th}}$ ) för delrummet  $A$ .

Så vad krävs för att en reducerad täthetsmatris inte ska vara ren? Det visar sig att den här frågan är intimt relaterad till en annan viktig fråga: när är de lokala frihetsgraderna i  $A$  sammanflätade med resten av frihetsgraderna i  $\bar{A}$ ? Sammanflätning är en av de mest exotiska egenskaperna hos kvantmekaniken, och ger upphov till icke-lokala korrelationer mellan åtskilda delar av ett system – något som Einstein kallade för ”*spooky action at a distance*”. Sam-

manflätning är också den väsentliga ingrediensen i kvantberäkningar, och det som gör det möjligt för en kvantdator att lösa vissa problem exponentiellt snabbare än en klassisk dator. Hur som helst, det visar sig att graden av icke-renhet hos den reducerade täthetsmatrisen  $\rho_A$  också är ett mått på hur mycket  $A$  och  $\bar{A}$  är sammanflätade. Detta mäts ofta med ytterligare ett viktigt bidrag från von Neumann, den så kallade sammanflätningSENTROPIN

$$S_{vN} = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A)$$

Om  $\rho_A$  är ren så är  $S_{vN} = 0$  – dvs.  $A$  är inte sammanflätad med  $\bar{A}$ . Man kan visa att den maximala sammanflätningSENTROPIN för ett delsystem med volym  $V$  är  $S_{\text{max}} = \alpha V$ , där  $\alpha$  är en konstant som beror på systemets detaljer. Detta kallas *volymlagssammanflätning* eftersom  $S$  skalar med volymen  $V$ . (Namnet är valt som jämförelse med sammanflätningen hos ett typiskt kvantmekaniskt grundtillstånd som istället följer en arealag:  $S \sim \partial A$  där  $\partial A$  betecknar delrummets begränsningsarea.)

Vad händer då om vi tar Wigners slumpmässiga tillstånd  $\psi_{\text{RMT}}$  och beräknar dess sammanflätningSENTROPIN  $S_{vN}(\psi_{\text{RMT}})$ ? Beräkningen gjordes av Don Page 1993 och resultatet är något överraskande: sammanflätningSENTROPIN för slumpmässiga tillstånd är lika med det maximalt möjliga värdet. Detta innebär att väsentligen alla slumpmässiga tillstånd är maximalt sammanflätade. Ett sådant maximalt entropitillstånd ger en reducerad täthetsmatris som är lika med enhetsmatrisen (eftersom enhetsmatrisen maximerar  $\text{tr}(\rho \log \rho)$ ), men detta motsvarar en termisk täthetsmatris vid temperatur  $T \rightarrow \infty$ ! (Detta eftersom  $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\beta E_i} = 1$  för alla  $E_i$ .) Så ett slumpmässigt tillstånd beskriver alltså ett termiskt tillstånd vid oändlig temperatur.

Vi gör framsteg. Isolerade mångkropparsystem är ytterst komplicerade, och vi kan föreställa oss att alla partiklar, under systemets tidsutveckling, sammanflätas med alla andra. Eftersom varje växelverkan mellan systemets partiklar sammanflätar dem, kommer systemets tillstånd så småningom att bli maximalt sammanflätat – detta samtidigt som systemets tillstånd som helhet förblir rent. Den höga graden av sammanflätning gör att varje lokal del ( $A$ ) av systemet blir ett blandat tillstånd. Resten av systemet ( $\bar{A}$ ) fungerar då som ett termiskt bad för delrummet  $A$ , vilket nu beskrivs av en termisk täthetsmatris, om än vid oändlig temperatur.

## Termalivering och sammanflätning

Naturligtvis termaliserar system vanligtvis inte till oändlig temperatur, utan snarare till någon ändlig temperatur bestämd av energitätheten i det initiala tillståndet – i vår vardagsanalogi bestämd av temperaturen och mängden mjölk som hålls i det kokande kaffet. Detta måste på något sätt fångas i tillståndets struktur, som alltså inte kan beskrivas som helt slumpmässigt. Det är här som den så kallade *hypotesen om egentillståndens termalivering* (eng. *eigenstate thermalization hypothesis*) kommer in. De grundläggande idéerna lades fram av Josh Deutsch 1991 och av Mark Srednicki 1994, men det är först under det senaste decenniet som de har kunnat testas experimentellt och i datorsimuleringar.

Hypotesen är på sätt och vis bara en liten generalisering av slumpmatristeori. Vi kan föreställa oss energinivåerna för ett typiskt mångkropparsystem fördelade längs en energi-axel. Om vi zoomar in inom ett litet energifönster, säg runt  $E_1$ , så har nivåerna och matriselementen av observabler för dessa tillstånd, samma struktur som hos en slumpmässig matris. En slumpmässig matris behöver dock en skala för att vara väldefinierad, säg  $\bar{O}(E_1)$ , där  $\bar{O}(E_1)$  betecknar det genomsnittliga värdet för observabeln vid energin  $E_1$ . Ett liknande fönster vid någon annan energi, säg  $E_2$ , beskrivs också av en slumpmässig matris, fast vid en annan skala  $\bar{O}(E_2)$ . Så termaliseringshypotesen säger att egentillstånden i ett litet energifönster är som egentillstånden för slumpmässiga matriser, men med en amplitud  $\bar{O}(E)$  som är en funktion av energin, med ett så långsamt energiberoende att den kan antas vara konstant över energierna i det aktuella energifönstret. Eftersom energiegentillstånden bestämmer tidsutvecklingen för ett godtyckligt tillstånd (som kan vara en superposition av flera energiegentillstånd), gör denna struktur också förutsägelser om hur allmänna icke-jämviktstillstånd utvecklas i tiden. I själva verket är denna tidsutveckling mycket lik den hos ett slumpmässigt tillstånd: allt blir sammanflätat med allt, men på ett sådant sätt att den reducerade täthetsmatrisen för delrummet  $A$  blir termisk (se sidorutan), vid den temperatur som är relevant för det specifika tillståndet. På detta sätt löser sammanflätning termaliseringsgåtan.

Sammanflätning är ett märkligt fenomen. Albert Einstein förstod fenomenet, men vägrade tro att det faktiskt var en realitet – han tyckte faktiskt att det var så orimligt att han trodde sig

kunna visa att kvantmekaniken var ofullständig bara genom att peka på allt konstigt som sammanflätning kan leda till. Men att sammanflätning faktiskt är en verklig egenskap hos naturen har idag visats i ett flertal experiment, och det råder inte längre någon tvekan om fenomenets existens. Men de experiment man gör involverar oftast bara ett fåtal partiklar. Mycket återstår därför att förstå om sammanflätning i mångkropparsystem, men en rad viktiga framsteg har gjorts bara under de senaste åren. Denna typ av sammanflätning har blivit ett viktigt teoretiskt verktyg för att förstå starkt korrelerade mångkropparsystem, och gränserna för vad som faktiskt kan mätas i experiment drivs hela tiden framåt. Hypotesen om egentillståndens termalivering är bara ett av många sådana framsteg.

Detta tar oss tillbaka till artikelns början, och till problemet med mätningar i kvantmekaniken. En kvantmätning är i allt väsentligt mycket lik termalivering. Istället för att ett litet delsystem blir sammanflätat med resten av systemet (som är mycket större), blir ett kvantsystem som utsätts för en mätning starkt sammanflätat med ett mycket större mätinstrument. Denna komplicerade process resulterar sedan i en mätning som kommer att se ut som en vågfunktionskollaps, eftersom den mesta informationen faktiskt går förlorad till starkt sammanflätade (och därmed icke-lokala) frihetsgrader som i praktiken inte längre är tillgängliga för mätning. Även om detaljerna i denna process kanske inte har utarbetats i tillräcklig detalj för att tillfredsställa alla, är jag övertygad om att detta är något som kommer att uppnås inom kort. Och detta skulle inte vara möjligt utan vår moderna förståelse av sammanflätning i mångkropparsystem. Men vem vet, kanske redan von Neumann förstod detta när han formaliserade vågfunktionens kollaps – han tycks trots allt redan ha förstått termalivering. ❖

## För vidare läsning

Andrew Szanton: *The recollections of Eugene P. Wigner as told to Andrew Szanton.*, Plenum Press (1992).

