

SÄRTRYCK UR:

KOSMOS

ENHETER OCH NATURKONSTANTER

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS ÅRSBOK 2020



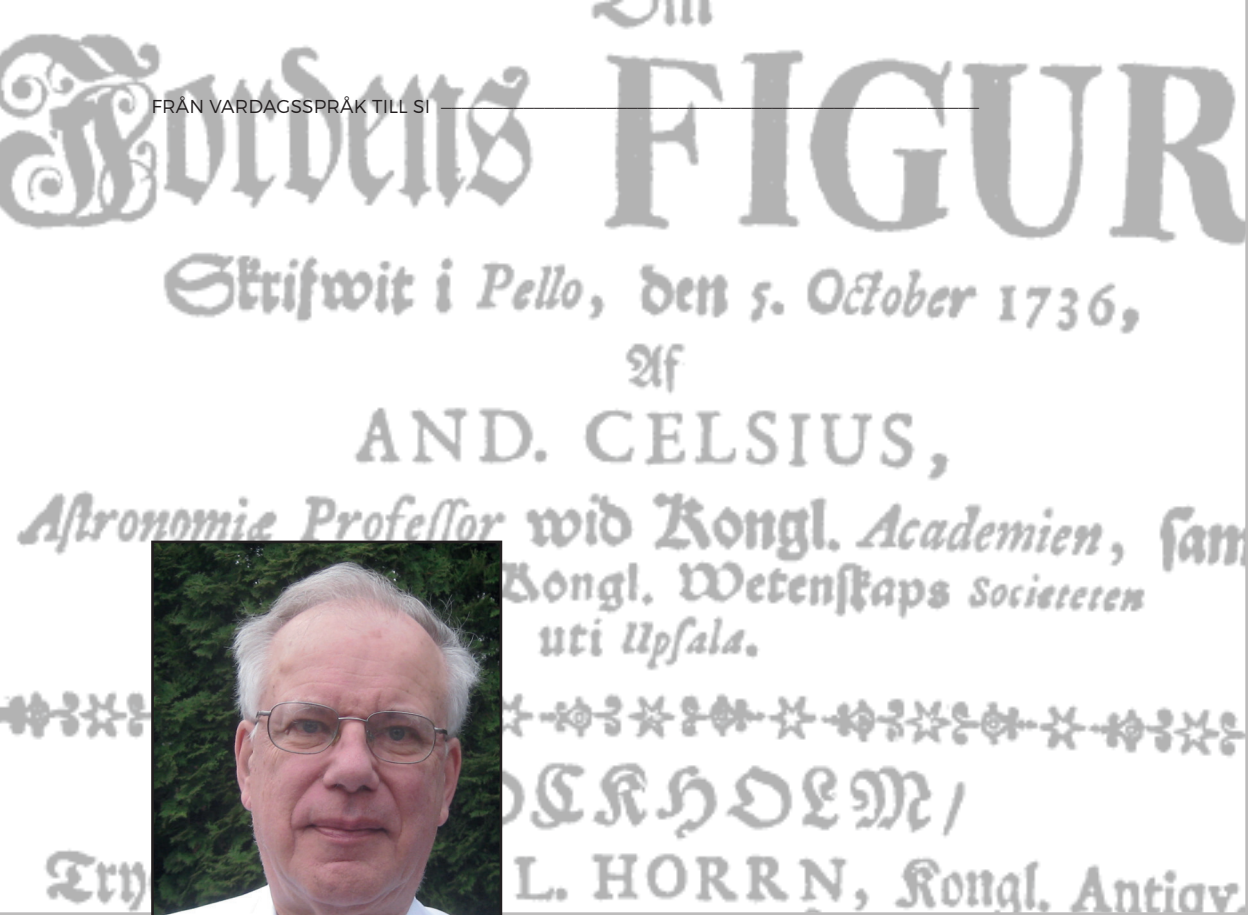
FRÅN VARDAGS- SPRÅK TILL SI

© GÖRAN GRIMVALL



Artikeln publiceras under Creative Commons-licensen CC BY-NC-SA 4.0
För bildmaterial med källhänvisning
gäller samma upphovsrättsliga
regler som för källan.

f SVENSKA
FYSIKER
SAMFUNDET



Göran Grimvall

är professor emeritus vid KTH i teoretisk fysik, särskilt materialteori. Forskningen har främst avsett termofysikaliska egenskaper hos kondenserad materia. Han är också mycket aktiv när det gäller högskolans ”tredje uppgift”, bl.a. inom standardisering, skolfrågor och populärvetenskap.

Mått av olika slag har haft viktiga roller i civilisationer, ända sedan (minst) det tidiga Mesopotamien. För att mått ska vara meningsfulla krävs dock att de har någorlunda samstämmiga definitioner. Göran Grimvall skriver om mått och enheter, hur dess bruk har varierat genom tiderna och vilka konsekvenser missförstånd kan få.

Bilden: Titelsidan till Anders Celsius skrift 1736 om jordens form. Se vidare på sid 57.

Från vardagsspråk till SI

Vardagsspråk

Våren 2020 publicerade Pentagon officiellt tre videoklipp där piloter kommenterade vad de uppfattade som AAV, *anomalous aerial vehicles* (tidigare kallade UFO). I en av inspelningarna säger piloten: "They're all going against the wind, the wind is 120 knots to the west". I många svenska tidningar återgavs detta som "De flyger alla mot vinden. Vinden är 61 sekundmeter". Den svenska termen sekundmeter är naturligtvis felaktig men svårutrotad. Dess motsvarighet finns inte i engelska och är nästan okänd i tyska. Men i tyskt talspråk är det vanligt att fordons fart uttrycks i *Stundenkilometer*, medan vi i Sverige aldrig skulle säga dess motsvarighet "timkilometer". Enheten *knot* (knop; en nautisk mil per timme) används däremot inom flyg och sjöfart.

Varför säger man sekundmeter men inte timkilometer? Det kan knappast vara för att få ett kortare uttryck eftersom timkilometer förkortar något mer än sekundmeter. Vi tycks också i talspråk ha en viss aversion mot att uttrycka hela enheten korrekt när vi till exempel säger "en tvåa på 40 kvadrat", "en motor på 500 kubik", "vi seglade 30 distans" (distansminuter), "wienerbrödet ger 300 kalorier" (kilokalorier), "i sommaräcken har jag 2,3 kilo" (för äldre enheten kp/cm^2) eller "Hiroshimabomben var på 15 kiloton". Fast även den mest renlärige fysikern skulle i affären troligen be att få "ett kilo köttfärs" eller "tre hekto skinka" – inte det korrekta ett kilogram eller tre hektogram.

"Jag har 220 kilometer till min sommarstuga." Uttrycker man sig så reagerar de flesta svenskar, som istället skulle säga 22 mil. På trafikmärkena anges dock alltid avstånd i kilometer. Vi är tämligen

ensamma i världen om att ha ett eget namn för 10 000 meter. Då Sverige anslöt sig till meterkonventionen var Norge i union med Sverige och därför finns mil även i norska språket men inte i det danska. Till en början talades om en nymil eftersom den tidigare svenska milen var nästan lika lång, ca 10 689 m. I svensktalande Finland skulle man säga att det är 220 kilometer till Vasa, inte 22 mil. Begreppet nautisk mil återkommer vi till.

Officiella mätvärden för bränsleförbrukning måste anges för alla nya personbilar som säljs inom EU. Förbrukningen skall uttryckas i liter per 100 kilometer men fortfarande hör man ofta i Sverige att den anges i liter per mil.

Ett tag fanns längdenheten myriameter baserad på prefixet myria med betydelsen 10^4 , och som ingick i det ursprungliga metriska systemet från 1795. År 1975 förklarade USA att enheten *myriameter* inte längre var acceptabel och i Sverige är det länge sedan den förekom.



Längs floden Rhen satte man på 1860-talet upp stenar för varje myriameter (10 km). Här är stenen i Rüdesheim, 36 myriameter (XXXVI = 36) från Basel. Notera att decimaltecknet i 360,000 är ett kommatecken. (By Brühl – Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8060848>).

Från fot och tum till meter

En tum (inch, in) är exakt 25,4 mm. En fot (foot, ft) = 12 tum är alltså exakt 30,48 cm. Men så har det bara varit sedan 1930-talet. Innan dess var en brittisk tum (imperial inch) relaterad till den brittiska arkivyarden = 36 inch, med 1 inch $\approx$ 25,399 977 mm. I USA var 1 yard = 3 600/3 937 m (exakt) vilket ger 1 inch $\approx$ 25,400 050 800 mm. Svensken Carl Edvard Johansson, "Mått-Johansson" (1864–1943), hade uppfunnit en måttsats bestående av 102 planslipade stålblock att användas vid kalibrering av måttsatser. De var så noggranna att de kom till allmän användning i amerikanska bilfabriker. Som en kompromiss mellan de båda inch-måtten bestämde sig Johansson för att ta 1 in = 25,4 mm exakt. År 1930 beslöt British Standards Institution att följa Johanssons kompromiss. År 1933 fattade American Standards Association samma beslut. USA och alla samväldesländerna anslöt sig 1950 officiellt till definitionen 1 in = 25,4 mm. För mer om "Mått-Johansson", se Torsten Althin, System Johansson, Kosmos 1978.

Den brittiska "arkivyarden" förvarades i Towern men på trappan vid Trafalgar Square (upp mot National Gallery) kan man även i dag se metallplattor som anger längden av 1 yard och 1 foot.



Brittiska enheterna foot och yard finns markerade på en trappa vid Trafalgar Square, London.

(By Kaihsu Tai – Own work, CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=224255>)

Ungefärliga äldre längder på en fot, i cm	
Sverige	29,7
Preussen	31,4
Danmark	31,4
Frankrike	32,5
England	30,5

Ännu vid mitten av 1800- talet var det stor skillnad i längdenheten fot.

I en bok av Jakob Köbel, tryckt ca 1535, står att man en söndag skall ta 16 män, långa såväl som korta, som just kommer ut från högmässan och ställa dem på rad, tätt intill varandra. På så sätt kan man definiera längdenheten fot.



Ett sätt att definiera längdenheten fot.

(By Jakob Köbel (1460 – 1533) – Geometrei. (published first in 1535 or 1536, reprinted in 1608.[1]), Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21198693>)

*En tum är bredden av
snickarens tumme.
(foto: Göran Grimvall)*



En tum är ungefär bredden av snickarens tumme när han trycker den mot underlaget. Många tror felaktigt att det istället är längden från tummens spets till första knogen, men det blir alldeles för långt. Med den korrekta (men naturligtvis grova) definitionen kan man enkelt mäta upp två tum genom att lägga vänster och höger hands tummar intill varandra.

Jordens omkrets – en ”naturkonstant”

När metersystemet först diskuterades ville man relatera det till ”naturkonstanter” – inte till människans mått. Jorden var då ett bra val, med längdenheten meter baserad på jordens omkrets. Från längdenheten kunde man definiera volymen 1 liter = 1 dm³ och låta massenheten kilogram svara mot massan av 1 liter vatten. Med denna utgångspunkt tillverkades ”arkivmetern” och ”arkivkilogrammet”. Tidsenheten sekund baserades på jordrotationen runt sin axel under ett dygn.

År 1791 beslöt den franska vetenskapsakademien att längden av metern skulle utgöra 1/10 000 000 av längden av jordmeridi-ankvadranten, det vill säga sträckan från nordpolen till ekvatorn längs meridianen genom Paris. De två franska astronomerna Méchain och Delambre ledde 1792 så kallade gradmätningar där man mätte avståndet mellan Dunkerque och Barcelona. Genom att anta att jorden var sfärisk fick man dess radie och därmed längden på arkivmetern. Från satellitmätningar vet man i dag att den sanna längden är 10 002 290 meter, vilket gör arkivmetern ca 0,2 mm ”för kort”.

Redan Eratosthenes, bibliotekarie vid det berömda biblioteket i Alexandria, hade ca år 240 före vår tideräkning beräknat jordens omkrets. Han visste att då solen stod i zenit i den egyptiska orten Syene avvek den mätbart från lodlinjen i Alexandria, med en vinkel som var ungefär $1/50$ av ett helt varv. Avståndet mellan Syene och Alexandria var ca 5 000 stadier eller i våra mått ca 800 kilometer. Ett helt varv runt jorden blir alltså sträckan 40 000 km. Överensstämmelsen med meterdefinitionen får inte tas alltför bokstavligen, men det är ändå anmärkningsvärt hur väl Eratosthenes uppskattning stämmer.

De gamla enheterna sjömil och distansminut byggde också på jordens omkrets. De har nu ersatts av enheten nautisk mil. En nautisk mil är inte en SI-enhet, men den är godkänd för användning inom SI. Ursprungligen var det sträckan som upptas av 1 minut eller $1/60$ breddgrad vid ekvatorn. Om jorden är en sfär där jordmeridiankvadranten är 10^7 meter blir 1 distansminut $= 10^7/(90 \times 60)$ m $\approx 1851,85$ m. År 1929 bestämde *First International Extraordinary Hydrographic Conference* att 1 nautisk mil = 1852 m (exakt). Enheten förekommer vid angivande av territorialgränser samt inom flyg och sjöfart där farten 1 knop (kn) = 1 nautisk mil/h. Det finns ingen allmänt erkänd beteckning för enheten nautisk mil.

Man visste redan i början av 1700-talet att jorden inte är helt sfärisk utan något avplattad vid polerna. Anders Celsius deltog 1736 i en resa till Lappland tillsammans med några franska vetenskapsmän och på franska regeringens bekostnad. Avsikten var att göra en gradmätning nära polcirkeln, medan en annan expedition gjorde mätningar nära ekvatorn. Celsius skriver om resultatet bl.a. år 1736 i *Bref om Jordens figur*.

Åren 1816–1855 gjordes nya gradmätningar. En kedja med 258 trianglar, definierad av 265 mätpunkter som markerats med borrhål, järnkors etc., sträckte sig från Svarta havet till Hammerfest. År 2005 utsåg Unesco kedjan och 34 av dess mätpunkter till världsarv. Fyra av punkterna ligger i Kiruna, Pajala, Övertorneå respektive Haparanda.

Till höger: "Struves meridianbåge" (efter F. G. W. von Struve) är ett världsarv som delvis finns i Sverige.

(By historica: 00:00, 14 September 2007 (UTC) – Image:Struve Geodetic Arc-fr.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2744496>)



Förordningar, föreskrifter, konventioner och avtal

1739 års aln

Längdmåttet aln kunde variera i Sverige. För att en gång för alla bringa reda i saken bestämdes 1739 att den så kallade Stockholms-alnen, som förvarades i Stockholms rådhus, skulle vara rikslikare för 1 aln ($\approx 59,4$ cm). Här är ett utdrag ur Kongl. Maj:ts Förordning Angående Måhl, Mått och Wigt Gifwen Stockholm i Råd-Cammaren then 29. Maj 1739:

1 §

I Hela Wårt Rike och thes underliggande Länder, Pommern undantagandes, skal wara enahanda Aln, måhl och wigt, af sådan beskaffenhet, som härefter förmäles.

2 §

Alnen, therefter all Längde, quadrat- och Cubisk mätning bör skie, och hwilken jemwäl til rättelse i handel och wandel, samt wid byggnad och Handtwärck, tiena bör, skal wara inrättad efter Stockholms Aln, och bestå af två Swenska fot. <... > Beträdas någon af them bruka annan aln, ware thes arbete ogilt, och straffes efter Lag, som en Mått och Wigts förfalskare.



Ofta lät man sätta upp ett alnmått på kyrkporten. Här är en kopia på Stånga medeltida kyrka, Gotland. Originalet, 55,5 cm långt, är från 1200-talet. (By Sven Rosborn – Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4952186>)

Hur mycket är en famn?

Långt in på 1900-talet skedde uppvärmning av hus i Sverige huvudsakligen med ved. Ett knektkontrakt 1891 vid Vadstena kompani fastställer till exempel att torparen som bränsle ”ärligen skall erhålla fyra famnar barrved som han själv upphugger på rusthållarens vedbacke”.

Vanligen avser famn ett längdmått, lika med 6 fot eller ungefär avståndet mellan horisontellt utsträcka händer. Det användes till exempel för att ange vattendjup. Famn var också ett volymmått för ved, vanligen knappt fyra kubikmeter. Men det fanns olika slags famn för ved och behovet av standardisering var stort. I ”Kungl. Maj:ts nådiga proposition till Riksdagen med förslag till förordning angående längden å saluhållen ved; given Stockholms slott den 1 mars 1918”, står det (något förkortat):

Då försäljning av ved sker efter mått av viss längd och höjd, skall, därest icke annorlunda avtalats, veden hava en längd av en meter. Säljer någon ved i strid mot bestämmelse i § 1, straffes med böter, från och med tio till och med ettusen kronor. Av böter, tillfalle en tredjedel, dock högst etthundra kronor, åklagaren och återstoden kronan. Finnes särskild angivare, tage han hälften av åklagarens andel. Saknas tillgång till böternas fulla gäldande, förvandlas de enligt allmän strafflag. Denna förordning träder i kraft den 1 september 1920.

Diskussionen i Riksdagen fortsatte dock och en ny förordning kom 1 juli 1927, då alla slags famnmått förklarades olagliga. Sålunda fick vid försäljning av brännved inga andra enheter än kubikmeter eller delar av kubikmeter användas.

Registerton och dräktighet

Ton (1 ton = 1 t = 1 000 kg) är en tilläggsenhet för massa i SI. Registerton är däremot en volymenhet, 100 engelska kubikfot eller ca 2,83 kubikmeter, som fram till 1982 användes för att ange ett fartygs storlek. Ordet ton kommer då ursprungligen från franska *tonneau* som betyder vintunna. Antalet registerton kunde utgöra grund för beskattning, hamnavgifter och försäkringspremier.

Numera används termen dräktighet för att ange fartygsstorlek. Det är ett dimensionslöst tal som bland annat innehåller volymen av fartygets lastutrymmen. Mätning av dräktighet regleras av den internationella skeppsmättningskonventionen.

Hästkrafter

Effektenheten hästkraft kan definieras på något olika sätt. Enheten 1 hp (imperial horse power) = 33 000 foot-pound per minut ≈ 746 W (watt) infördes av James Watt och Matthew Boulton ca 1783 som ett mått på hur effektiv Watts ångmaskin var när det gällde att pumpa vatten ur de engelska kolgruvorna. Detta gav dock en överskattning med ca 50 % av vad en häst kunde presterar under långvarigt arbete. En annan definition är 1 hk = 75 kpm/s (kilopondmeter per sekund) ≈ 735 W, dvs den effekt som motsvarar att lyfta 75 kilogram 1 meter på 1 sekund.

Beteckningen hk för hästkraft är svensk, och finns även på norska och danska (hestekraft). På engelska säger man horse power (hp), på tyska Pferdestärke (PS) och på franska cheval vapeur (ch, ”ånghäst”). Men vi såg just att 1 hk inte är samma som 1 hp.

Fortfarande kan man i annonser se motoreffekter angivna i hästkrafter (hk), trots EU-föreskrifter om användning av SI-enheter. SWEDAC (Styrelsen för ackreditering och teknisk kontroll; Swedish Board for Accreditation and Conformity Assessment) skriver år 2009:

Utöver de måttangivelser som avses i 2 § (dvs SI-enheter och tilläggsenheter, t.ex. h, timme) får kompletterande måttangivelser förekomma. Med kompletterande måttangivelser avses en eller flera måttangivelser med hjälp av enheter som inte är upptagna i bilagan till dessa föreskrifter. (t.ex. hk, hästkraft; kalori) När kompletterande måttangivelser används ska måttangivelse enligt 2 § ges en dominerande utformning. Den kompletterande måttangivelsen ska utformas med mindre eller lika stora skrivtecken som måttangivelser enligt 2 §.

Provstoppsavtal

Threshold Test Ban Treaty är en överenskommelse mellan USA och Sovjetunionen om begränsning av kärnvapenprov. Dess viktigaste paragraf lyder:

Each Party undertakes to prohibit, to prevent, and not to carry out any underground nuclear weapon test having a yield exceeding 150 kilotons at any place under its jurisdiction or control, beginning March 31, 1976.

Vi ser att bombernas styrka uttrycks i 150 kiloton, utan närmare precisering. Det är då underförstått att det gäller en energiomvandling motsvarande 150 kiloton av explosivämnet TNT; trotyl eller trinitrotoluen $\text{CH}_3\text{C}_6\text{H}_2(\text{NO}_2)_3$. Den energi som frigörs vid omvandlingen av en viss mängd TNT kan variera betydligt beroende på situationen. I samband med kärnvapen har man därför antagit konventionen att 1 g TNT ger exakt 1 kcal $\approx$ 4 184 J.

Termisk diffusivitet – en väldefinierad storhet

Utöver de sju grundenheterna i SI finns det 22 härledda enheter med egen benämning och egen beteckning, t.ex. kraft, newton (N) och elektrisk spänning, volt (V). Det finns också många storheter som har egna namn och definitioner men inga egna unika enhetsbeteckningar. Deras definitioner kan entydigt följas ända tillbaka till grundenheterna. Vi skall nu belysa en sådan kedja för storheten termisk diffusivitet (thermal diffusivity) så som den är standardiserad i dokumenten i serien ISO/IEC 80000, där ISO står för International Organization for Standardization och IEC betyder International Electrotechnical Commission.

I ISO 80000-5 *Thermodynamics* finns item 5-14 *thermal diffusivity* definierad som:

quotient of thermal conductivity and the product of mass density and specific heat capacity:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad ,$$

where λ is thermal conductivity (item 5-9), ρ is mass density (ISO 80000-4), and c_p is specific heat capacity at constant pressure (item 5-16.2).

Vi måste alltså gå tillbaka till definitionen av thermal conductivity (item 5-9 i 80000-5). Den lyder:

quotient of density of heat flow rate (item 5-8) and thermodynamic temperature (item 5-1) gradient which has the same direction as the heat flow.

Thermodynamic temperature är en av grundenheterna i SI men vi behöver definiera heat flow rate:

time rate at which heat (item 5–6.1) crosses a given surface.

I item 5–6.1 definieras heat som:

difference between the increase in the internal energy (item 5–20.2) of a system and the work (ISO 80000-4) done on the system, provided that the amounts of substances within the system are not changed.

För att fullständigt komma ner till grundenheterna i SI måste vi på liknande sätt följa kedjor som definierar mass density, specific heat capacity at constant pressure, internal energy och work. Enheten för varje storhet ("item" i 80000-serien) kan uttryckas i en kombination av grundenheterna. Till exempel är enheten för värmekonduktivitet $\text{kg m}/(\text{s}^3 \text{ K})$ och för termisk diffusivitet m^2/s .

Densitet, specifik vikt och specifikt värme

Definitionerna i 80000-serien uttrycks alltid på samma speciella sätt, som i exemplen ovan. Det kan tyckas vara onödigt formaliserat. Alla "vet" ju ändå vad som menas med till exempel densitet. I ISO 80000-4 definieras *density* som

quantity representing the spatial distribution of mass of a continuous material;

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV} ,$$

where m is mass (item 4-1) of the material contained in an infinitesimal domain at point r and V is volume (ISO 80000-3) of this domain.

Den svenska Rikstermbanken (finns på nätet) definierar densitet som "massa dividerat med volym". Notera att det inte heter "volymenhet" även om det är ett vanligt uttryckssätt. På samma sätt definieras fart som sträcka per tid, inte per "tidsenhet".

Rikstermbanken skriver beträffande densitet att tidigare användes även termerna täthet och specifik vikt för detta begrepp. Men ordet densitet har använts länge. I Svenska Akademiens ordbok (SAOB) står som första belägg "Buffon har ... sökt be-

visa jordklotet ega lika densitet och soliditet alt igenom. Wallerius Tankar 145 (1776)”. Begreppet specifik vikt (specifik tyngd) förekommer redan 1745 med belägget ”At mäta luftens tryckning genom högderna af qvicksilfvers columnen uti Barometern, supponerar at qvicksilfret altid har samma specifica tyngd. VetAH.” I Svensk ordbok (SO) utgiven av Svenska Akademien står under täthet: förhållandet mellan ett ämnes (eller en kropps) massa och volym numera ej anv. beteckning i fys. sammanhang, ersatt av ”densitet”. Ordet är belagt sedan 1734. Såväl densitet som täthet och specifik vikt (tyngd) kan alltså spåras redan till 1700-talet.

I SAOB står citatet ”Den olika mängd värme, som kropparna vid samma temperatur innehålla, kallas deras egentliga (specifika) värme”, hämtat från Berzelius Kemi 1: 32 (1808). Många som använder detta äldre begrepp är inte medvetna om att ordet ”specifik” i detta sammanhang numera betyder ”per massa”. Enheten för värmekapacitet (heat capacity) är $\text{J/K} = \text{kg m}^2/(\text{s}^2 \text{ K})$ medan storheten specifik värmekapacitet (specific heat capacity) definieras som värmekapacitet per massa, det vill säga dess enhet är $\text{J}/(\text{kg K}) = \text{m}^2/(\text{s}^2 \text{ K})$.

Storheterna i 80000-serien är grund för många andra dokument inom standardisering. Det är viktigt att dessa begrepp och tillhörande enheter är helt otvetydiga och täcker alla tänkbara situationer, även om de ibland kan tyckas vara triviala.

Enhetssången eller *Système International*

Denna sång skrevs 1975 av KTH-teknologen Anders Skog som bidrag från teknologsektionen Teknisk fysik till THS (Tekniska Högskolans Studentkår) sångartäflan. När den framförs på melodin Studentsången skall varje enhetsnamn uttalas; watt, kilogram, meter, weber, sekund osv. Fullständig uttalsanvisning står nedan.

W kg m Wb s
 Wm T A rad
 cd Sv Ns
 W Am lx dB
 °C W/m²
 J/kg H V C
 kg/m³ mol
 m/s²
 m/s²
 F!!

Uttalsanvisning

watt kilogram meter weber sekund
 ohmmeter tesla ampere radian
 candela sievert newtonsekund
 ohm amperemeter lux decibel
 grader Celsius watt per kvadratmeter
 joule per kilogram henry volt coulomb
 kilogram per kubikmeter mol
 meter per sekundkvadrat
 meter per sekundkvadrat
 farad!!

I ursprungsversionen stod det S (siemens; SI-enhet för konduktivitet) men det har nu ändrats till Sv (sievert; SI-enhet för stråldos) uppkallad efter Rolf Sievert, vilket ger en svensk anknytning. Uttrycket m/s^2 skall enligt reglerna egentligen utläsas ”meter per sekundtvå”, vilket dock skulle förta rytmen. Däremot är det korrekt att läsa W/m^2 som watt per kvadratmeter när man avser ”per area”, och analogt för kg/m^3 . De två avslutande utropstecknen skall betraktas just som sådana, och inte utläsas som matematikens semifakultet (där t.ex. $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$).

Sången vann visserligen inte sångartäflan men är välkänd bland landets teknologer. Den har också använts vid KTH-undervisning om dimensionsbetraktelser, där studenterna i en inlämningsuppgift skulle betrakta de tre första raderna i sången, uttrycka varje enhet i grundenheter i SI och multiplicera alla dessa enheter. Vad blir då potensen för massenheten kg i den betraktade produkten?

Dimensionsbetraktelser

Ett konsekvent användande av SI-enheter har många fördelar. Här skall vi belysa det genom exempel på formelkontroll, ”härlledning” av formler, tolkning av formeluttryck och skalningsbetraktelser, i några fall som bara innehåller enheterna för massa, längd, tid och temperatur samt dimensionslösa faktorer. Av pedagogiska skäl kommer dimensionen att uttryckas genom symbolerna för motsvarande måttenheter, kg, m, s, K, istället för de i SI allmänna dimensionsbeteckningarna **M** för massa, **L** för längd, **T** för tid och **Θ** för termodynamisk temperatur.

Formelkontroll

En enkel modell för luftmotståndet (kraften F) när ett föremål färdas genom luft med farten v ger

$$F = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2 \quad ,$$

Här är C_D en dimensionslös storhet som beror av föremålets form, A tvärsnittsarean vinkelrätt mot rörelseriktningen och ρ luftens densitet. Vi finner att formelns högerled har enheten

$$(\text{m}^2) (\text{kg}/\text{m}^3) (\text{m}^2/\text{s}^2) = \text{kg m s}^{-2} \quad ,$$

som också är uttrycket för kraftenheten newton. Formeln stämde alltså dimensionsmässigt.

”Härledning” av formel

Vi söker svängningstiden t_p för en plan pendel med pendellängden L och massan M . Pendelns svänger under inverkan av tyngdkraften så t_p bör bero av tyngdaccelerationen g . Ofta kan resultatet av en modellberäkning uttryckas med en produkt av de i modellen ingående storheterna. Vi gör därför ansatsen att t_p kan skrivas

$$t_p = C M^p L^q g^r \quad ,$$

där C är en dimensionslös konstant. Uttryckta i SI blir enheterna för vänster och höger led

$$\text{s} = (\text{kg})^p (\text{m})^q (\text{m}/\text{s}^2)^r \quad ,$$

Enda möjliga lösningen är $p = 0$, $q = 1/2$ och $r = -1/2$. Vi finner alltså att

$$t_p = C (L/g)^{1/2} \quad ,$$

som ger det välkända resultatet att svängningstiden är oberoende av massan M . Konstanten C går inte att få fram med dimensionsbetraktelse. En lösning av rörelseekvationen visar att $C = 2\pi$.

Naturligtvis kan man inte på förhand veta om t_p kan skrivas som ett enkelt potensuttryck men ofta är det så, som vi skall se i exemplen nedan. I skämttidningen Blandaren, med rötter i Tekniska högskolans studentkår, står det i Gåsblendaren hösten 1999:

Det är bara för att man skall lära sig någon formel. Det är alltid tre bokstäver. Fysik är så: två bokstäver gånger varandra som blir en tredje bokstav. Jag blir så full i skratt inför fysikaliska problem. De är så ohyggligt allvarliga. Och samtidigt så ohyggligt jönsiga.

Tolkning av formeluttryck

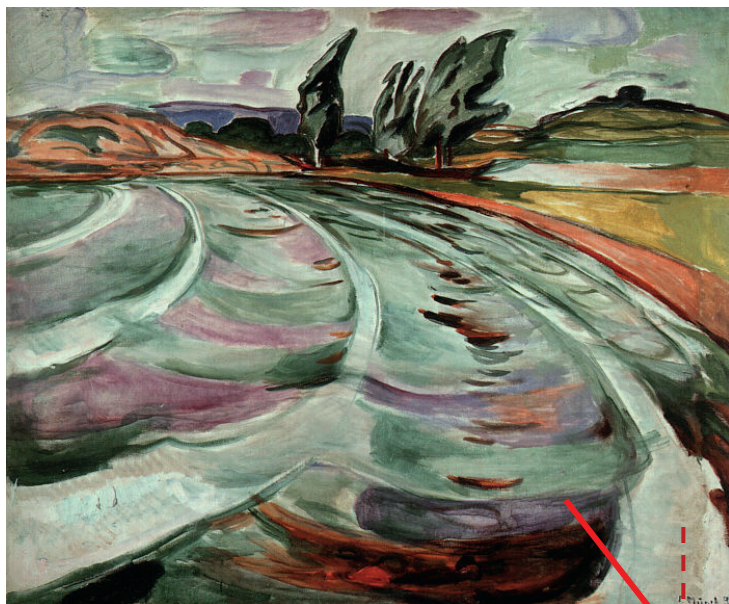
Betrakta uttrycket

$$C (gL)^{1/2} ,$$

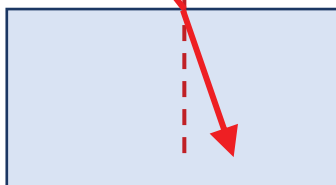
där C är en dimensionslös konstant, g är tyngdaccelerationen och L är en storhet med dimensionen längd. Resultatet har dimensionen av hastighet eller fart.

Om uttrycket beskriver fritt fall ger det farten efter sträckan L om fallet startar från vila, med $C = 2^{1/2}$. Men vad är tolkningen för andra situationer?

Om L är vattendjupet får man utbredningsfarten för vågor på vattenytan vid "grunt vatten" (djupet mycket mindre än våglängden) där $C = 1$ för både fashastigheten och grupphastigheten. Om L i stället är våglängden λ , och i fallet "djupt vatten" (våglängden mycket större än vattendjupet), ger en fullständig lösning av rörelseekvationerna att $C = (2\pi)^{-1/2}$ (fashastigheten) eller $C = (8\pi)^{-1/2}$ (grupphastigheten).



Edvard Munch, *Bølger* (1921). Vågor på långgrund vatten kommer in parallellt med stranden eftersom deras utbredningsfart varierar som roten ur vattendjupet. Fenomenet är samma som när ljus bryts mot normalriktningen då det infaller mot ett medium där ljusfarten är lägre.



Slutligen återgår vi till uttrycket

$$(2gL)^{1/2} ,$$

men låter L vara djupet under en fri vattenyta. Då får vi Torricellis utströmningslag, det vill säga vattenstrålens fart när den lämnar en vattenfylld cylinder.

Dessa fyra exempel visar att en kombination av storheter som alla har givna dimensioner kan leda till uttryck med samma dimension, i vårt fall en fart, men de svarar mot olika situationer med olika tolkning. Det är intressant att tänka på vad den precisa tolkningen kan vara av Plancklängden, ca 10^{-35} m, given av

$$l_p = (\hbar G/c^3)^{1/2} .$$

Här är $\hbar$ Plancks konstant dividerad med 2π , G gravitationskonstanten och c ljusfarten i tomrum

Det viner i tackel och tåg

Anta att vinden blåser med en viss fart v förbi ett cylindriskt föremål med diametern d . Kombinationen v/d har dimensionen frekvens. Hur kan detta tolkas? Svaret är att det bakom cylindern uppkommer regelbundna virvlar, uppkallade efter ungraren Theodor von Kármán. Deras frekvens kan skrivas

$$f = S v/d ,$$

där S är Strouhals tal, en dimensionslös konstant av storleksordningen 0,2.

På KTH:s campus, norr om biblioteket, finns en väggsulptur av Olov Tällström som visar fenomenet. Konstverket gjordes genom att ett foto av virvelbildningen, taget vid avdelningen för Strömningsteknik, förstörades. Sand hällades ut efter konturerna varefter en gjutmodell skapades. Det är von Kármán-virvlarna som gör att man vid hård vind kan höra ett ton från telefontrådar och elledning- ar och att man säger att det viner i tackel och tåg. Detta är också orsaken till att många skorstenar har ett spiralband. Utan det skulle en stadig vind kunna sätta skorstenen i resonanssvängning, ungefär som när en liten regelbunden knuff kan få en gunga att svänga allt högre. Spiralbandet ger en effektiv diameter som varierar, och därmed också varierande virvelfrekvens.



Olov Tällströms konstverk på KTH visar von Kármán-virvlar. Att cylindern ersatts med ett klot är "konstnärlig frihet". Skorstenen i närheten har spiralband för att förhindra att von Kármán-virvlar sätter den i resonanssvängning. (Foton: Göran Grimvall)

Vindhastighet v , m/s	Cylinderdiameter d , m	Frekvens f , Hz
15	0,02	150
15	1,00	3
25	0,02	250
25	1,00	5

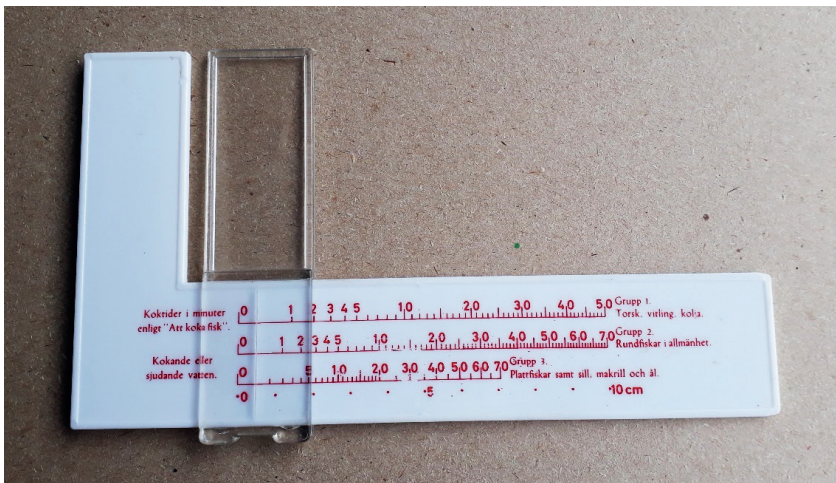
Frekvensen f för von Kármán-virvlar vid några värden på v och d . Hörbarhetsgränsen är ungefär 20 Hz.

Koktiden för fisk

Det är självklart att det tar längre tid att koka en stor fisk än en liten, men hur skalar sig koktiden t med fiskens storlek? Och vad menar vi med fiskens ”storlek”? Saken har undersökts i detalj av arkitekten Haqvin Carlheim-Gyllensköld i boken *Koka, steka, blanda*. För vad han kallar ”rundfiskar i allmänhet” mäter han fiskens bredd L på det tjockaste stället. Värmets inträngning bestäms av det effektiva värdet a på fiskköttets termiska diffusivitet. Vi antar att koktiden t beror enbart av storleken L och av a (SI-enhet m^2/s) och gör ansatsen

$$t = C L^p a^q \quad ,$$

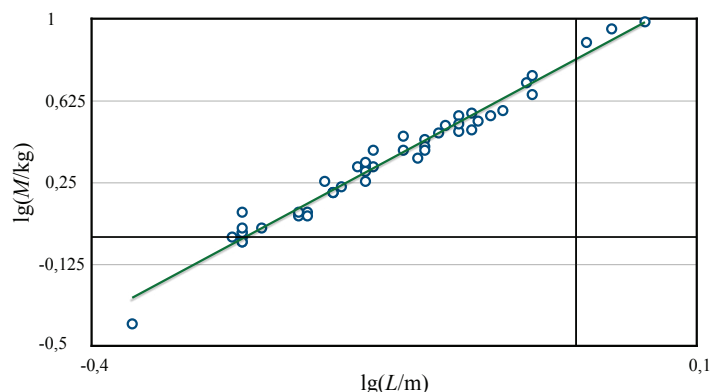
Dimensionsbetraktelse ger nu att $p=2$ och $q=-1$, det vill säga koktiden skalar sig som kvadraten på fiskstorleken uttryckt som en längd. För att mäta L har Carlheim-Gyllensköld utvecklat ett praktiskt skjutmått.



Skjutmått konstruerat av Haqvin Carlheim-Gyllensköld för att beräkna koktiden för fiskar. För torsk, vitling och kolja mäter man bredden mitt på fisken. (Foto: Göran Grimvall)

Men för den som inte äger ett sådant skjutmått skulle det vara lättare att basera koktiden på hur mycket fisken väger. För fiskar av samma form varierar deras massa kanske som kuben av en karakteristisk längd? Det visar sig stämma väl för gäddor. Tidigare KTH-rektorn prof. em. Janne Carlsson mätte under många år hur massan M för de gäddor han fiskade i Småland skalade sig med deras längd L . Om M varierar som L^3 skall en plot av $\lg M$ mot $\lg L$ ge en rät

linje med lutningen 3. Resultatet ger lutningen 2,99. I statistik från livförsäkringsbolag varierade M med kroppslängden L som $L^{2,9}$, att jämföra med BMI som beräknas från M/L^2 och som ger ett ungefärligt mått på korrelationen mellan fetma och hälsoproblem.



Gäddors massa M som funktion av deras längd L . "Utliggaren" med liten massa fanns i buken av en stor gädda. Data från Janne Carlsson.

Årets kallaste dag är i maj

I föregående avsnitt om fiskkokning fann vi att kombinationen $(at)^{1/2}$ ger en storhet med dimensionen längd. Men det finns andra enkla kombinationer med a som också ger en längd, till exempel

$$D = (a / \omega)^{1/2} ,$$

där ω är en frekvens. Vi skall se hur temperaturen T under ett år varierar på djupet D under markytan. Anta som en enkel modell att den vid markytan varierar sinusformigt med frekvensen

$$\omega = 2\pi / (365 \times 24 \times 60 \times 60) \text{ s}^{-1} = 2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1};$$

$$T_s(t) = T_0 + \Delta T \sin(\omega t) .$$

Värmeledningsekvationen ger temperaturen $T(D, t)$ vid djupet D och tiden t :

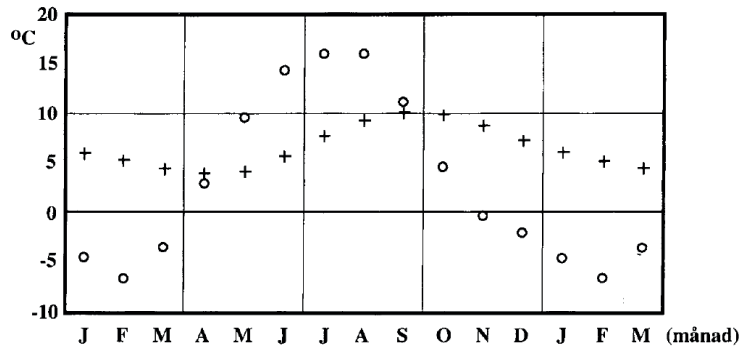
$$T(D, t) = T_0 + \Delta T \exp[-D(2a/\omega)^{-1/2}] \sin\{\omega[t - D(2a\omega)^{-1/2}]\} .$$

På stort djup är temperaturen konstant T_0 , det vill säga lika med årets medeltemperatur. Det stämmer med erfarenheten att temperaturen i djupa grottor är oberoende av årstiden och att en bra jordkällare kan vara frosthärdig. Vi ser också att de periodiska variationerna är fördröjda i tiden med

$$D(2a\omega)^{-1/2}.$$

Typiskt värde på a i jord är $5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. På djupet $D = 3 \text{ m}$ blir fördröjningen ca $7 \times 10^6 \text{ s}$ eller knappt 3 månader.

Anders Ångström och Anders Celsius var båda professorer i Uppsala. Ångström verkade drygt ett sekel efter Celsius. Han gjorde inte bara noggranna mätningar av atomspektra utan även temperaturmätningar. Figuren visar, med ringar, luftens medeltemperatur i grader Celsius under åren 1838–1845. Plustecknen visar temperaturen på djupet 10 fot, eller ca 3 m, där det med god marginal är frostfritt. Notera att på detta djup inträffar årets lägsta medeltemperatur i början av maj och den högsta i början av oktober, vilket stämmer hyggligt med vår uppskattning ovan av tidsförskjutningen. Med $a = 5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ blir $\exp[-D(2a/\omega)^{-1/2}] \approx 1/4$ när $D = 3 \text{ m}$. Det stämmer väl med den uppmätta minskningen i temperaturvariationens amplitud på 3 m djup jämfört med amplituden vid markytan.



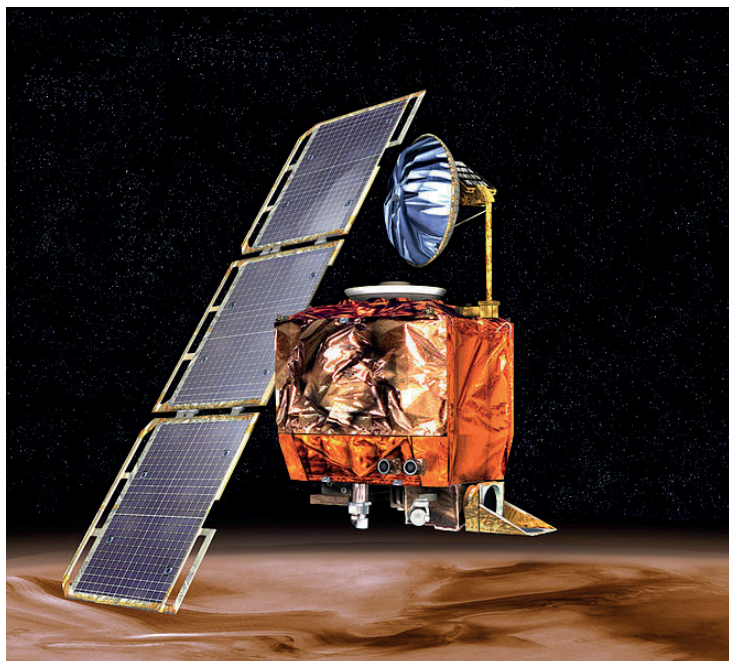
Figuren från uppsalap professorn Olof Beckmans skrift *Ångström, far och son* (1997). *Acta Universitatis Upsaliensis*, 1997, p. 45.

Populärt säger man att kylan under vintern ”tränger ner” i marken, men bättre är att säga att det är värmeenergin som flödar bort från marklagret. Energin går ju från ett varmare till ett kallare område. Notera att extremvärdena för temperaturen nere i marken inträffar ungefär när temperaturen på det betraktade djupet är samma som vid markytan. Så länge temperaturerna är olika på olika avstånd till markytan så kommer värmeenergi att flöda mot det kallare området.

Katastrofalt med oklara enheter

Mars Climate Orbiter

Fortfarande har USA inte allmänt gått över till SI-enheter. År 1999 förlorade NASA farkosten *Mars Climate Orbiter* när specifikationen från NASA till Lockheed Martin angav att beräkningar skulle göras i SI-enheten Ns (newtonsekund) men ett jordbaserat datorprogram för styrning av farkosten antog lbf s (poundforce-second). Farkostens öde är okänt; brann den upp vid inträdet i Mars atmosfär eller studsade den mot atmosfären och försvann ut i rymden? Det fanns indikationer under färden på att något kunde vara fel, men de för- anledde inga ändringar och ansvaret för misstaget har aldrig blivit helt klarlagt.



Konstnärens bild av NASA-farkosten *Mars Climate Orbiter*. (By NASA/JPL/ Corby Waste – <http://www.vitalstatistics.info/uploads/mars%20climate%20orbiter.jpg> (see also <http://www.jpl.nasa.gov/pictures/solar/mcoartist.html>), Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=390903>)

Gimli glider

En incident 1983 berodde på förväxling mellan enheter, men det hela slutade utan personskador. Det gällde Air Canadas flight 143, vars nya Boeing 767 skulle flyga från Montreal till Edmonton. Efter

halva sträckan stannade båda motorerna på grund av bränslebrist. Planet lyckades glidflyga till en övergiven militärflygplats (Gimli) som användes för racertävlingar. Noshjulet gick inte att låsa och vek sig vid den våldsamma landningen, men nosens friktion mot marken och en mittbarriär längs landningsbanan fick stopp på planet. Alla passagerarna lyckades ta sig ut oskadda. Planet, som reparerades hjälpligt på plats och sedan återgick i flygtrafik, kallades efter olyckan för Gimli glider.

Hur kunde man missa att ha tillräckligt med bränsle? Ett delproblem var att bränslemätaren var ur funktion, men det löste markpersonalen genom en mätsticka. Kanada hade just gått över till SI-enheter när det gällde flygbränsle för den nya flygplanstypen, där man räknade i liter och kilogram istället för pound och gallon.

Så här gick den felaktiga beräkningen till. Med mätstickan noterade man att det fanns 8 000 liter bränsle ombord, motsvarande 6 400 kg, ty densiteten är 0,8 kg/liter. Piloten angav att planets färd krävde 22 000 kg. Men markpersonalen räknade med densiteten 1,77 kg/liter vilket gav att ca 13 000 kg redan fanns ombord, för man blandade ihop med värdet 1,77 lb/liter (pound per liter). Man trodde alltså felaktigt att det bara kräves ytterligare (22 000 – 9 000) kg = 9 000 kg. I stället för att fylla på ca 16 000 kg eller 20 000 liter, fyllde man bara på ca 5 000 liter för man tog återigen densitetsvärdet 1,77 kg/liter. För övriga Air Canada-plan använde man vid den tiden fortfarande de äldre enheterna, vilket visar på riskerna vid systemförändringar.

Lång väg till enhetliga mått

Det sker en ständig utveckling mot allt större enhetlighet när det gäller olika mått, men fortfarande är de stora skillnader, både när det gäller länder och vissa slag av produkter. Det är bara tre länder, USA, Myanmar och Liberia, som ännu i stor utsträckning använder tum, fot, yard och mile för att ange längder. Men USA var ändå ett av de 17 länder som (tillsammans med Sverige-Norge) år 1875 anslöt sig till meterkonventionen, *Treaty of the Metre*. Inom flyget används över hela världen fot för att ange flyghöjd och en ändring skulle leda till stor förvirring och katastrofer. I andra fall skulle vinsten vid övergång till metersystemet vara obetydlig, t.ex. att inte längre ange storleken på TV-skärmen genom diagonalens längd i tum. Ibland är det en generationsfråga innan övergången till metersystemet helt slagit igenom i talspråket. ”Tretumsspikar”

har nu i Sverige längden 75 mm (3 tum = 76,2 mm, exakt). Klädstorlekar är ett område där utvecklingen går långsamt. EU har i standarden *EN 13402 Size designation of clothes* tagit ett steg mot regional enhetlighet men måtten är annorlunda i t.ex. USA och Japan. I högre fysikundervisning används dock SI-enheter i hela världen. *America is slowly going metric – inch by inch.* ❖

För vidare läsning

SI-guiden på engelska är fritt tillgänglig:

<https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>

Torsten Althin: System Johansson, Kosmos, 1978

Anders Celsius: Ett Bref till N.N. om Jordens FIGUR.

<http://runeberg.org/jordensfig/>

Olof Beckman: Ångström, far och son. Acta Universitatis
Upsaliensis, 1997

Ett
Bref
 Till
 N. N.
 Om
Jordens FIGUR,
 Skrifvit i Pello, den 5. October 1736,
 Af
 AND. CELSIUS,
*Astronomiæ Professor wid Kongl. Akademien, samt
 Secreterare wid Kongl. Wetenſkaps Societeten
 uti Uppsala.*
 —————
 EDOERHOLM/
 Tryckt hos JOH. L. HORRN, Kongl. Antiqu.
 Archiv. Hoftryckaren, Åhr 1736.
 Och finnes hos honom til köps.

Vinjettbilden i sin helhet: Titelsidan till Anders Celsius skrift 1736 om jordens form.