



**Karin Cedergren**

är teknologie doktor i nanoteknologi och sedan 2018 verksam vid riksmätplatsen för elektriska storheter på RISE – Research Institutes of Sweden, i Borås. Hon arbetar bland annat med att upprätthålla och utveckla de svenska nationella standarderna för elektriska storheter och är projektledare för RISEs Kibblevägsprojekt som går ut på att skapa en realisering av det elektroniska kilogrammet i Sverige.



Länge har definitionen av ett kilogram varit bunden till en metallcylinder i ett kassavalv i Paris. Den viktigaste anledningen till revisionen av SI-systemet är att massenheten nu för första gången istället bundits till en naturkonstant. Karin Cedergren skriver om pensioneringen av den internationella kilogramprototypen och om de precisionsmätningar som ligger till grund för den nya definitionen.

*Bilden: Det gamla kilogrammet har slagits ut av en ny definition baserad på Plancks konstant h. (bild: Hans He)*

# Det moderna kilogrammet

Kilogrammet är dött – länge leve kilogrammet! Så lät det i media jorden runt i november 2018 när resolutionen som gav kilogrammet en ny definition röstades igenom av The General Conference on Weights and Measures (CGPM) vid dess 26:e möte i november 2018.

Beslutet var historiskt. Sedan den 20 maj 2019, den dag då beslutet trädde i kraft, är den internationella kilogramprototypen i Paris (IPK) från 1889 inte längre definitionen för ett kilogram. För första gången sedan 1700-talet bygger massaenheten inte längre på en av människan skapad artefakt utan vem som helst som har det tekniska kunnandet och de ekonomiska medlen kan realisera ett kilogram var som helst i världen. Nuförtiden definieras kilogrammet av Plancks konstant, ljusets hastighet och frekvensen för övergången mellan cesium-133-atomens två hyperfinnivåer.

Att revideringen av SI-systemet har skett just nu är ingen slump och kilogrammet är en stor orsak till att det inte gjorts tidigare. Den nya kilogramdefinitionen bygger på ett noggrant uppmätt värde av Plancks konstant och det har tagit sin tid att komma dit vi är i dag när det gäller noggrannhet i mätningarna.

I mångt och mycket är kilogrammets historia ett stycke vetenskapshistoria som visar hur världen har förändrats under de senaste 250 åren, och vårt tankesätt med den. I Kosmos 1965 skriver den svenske Nobelpristagaren Kai Siegbahn om det metriska systemets födelse, storpolitiken kring vilka definitioner för ”mått och vikt” som skulle väljas och hur den franske fysikern Antoine Lavoisier fick uppdraget att skapa en massaenhet som skulle vara knuten till längdenheten. Siegbahn beskriver också vilka beslut som ledde fram till att IPK såg dagens ljus och svårigheterna som är förenade med att ersätta kilogramprototypen med något annat än en artefakt.

Men nu har det skett. Det här är fortsättningen på historien och den handlar om hur det gick till när kilogrammet gick från att definieras av en mycket konkret metallcylinder med massan ett kilogram, till att vila på en definition som baserar sig på Plancks konstant och realiseras av en Kibbleväg, vilken med hjälp av kvantfysikaliska samband kan mäta upp ett kilogram på elektronisk väg. Det är historien om hur kilogrammet blev elektroniskt.

## Det metriska systemets födelse

För att förstå vidden av det beslut som togs i november 2018 måste vi ändå först vända blicken mot hur det hela började. Man kan säga att startskottet kom någon gång på 1700-talet. Det var då tankarna om ett enhetligt måttssystem för hela den ”moderna” världen konkretiserades och de två första enheterna blev metern och kilogrammet – enheterna för längd och massa. Det här var under tiden för upplysningen och den vetenskapliga revolutionen. Newtons läror om mekanik och gravitation var kända och matematiken hade utvecklats i takt med dem. Filosofi och naturvetenskap gick nu hand i hand och det här var den rationella tidsåldern där man ville göra upp med gamla föreställningar och gammal vidskeplighet. Det nya måttssystemet skulle vara demokratiskt och vetenskapligt. Det skulle vara ett mått knutet till naturen, inte till en enskild härskares egna idéer, längd på underarmar eller storlek på fötter.

Metern kom att födas ur dessa tankar och skulle från början motsvara en tiondel av avståndet från nordpolen till ekvatorn längs den meridian som löper genom Paris. En meterprototyp som skulle motsvara sagda distans göts när det några år senare uppdagades att meterprototypen var lite för kort så beslutades att det skulle vara den gjutna prototypen, inte distansen mellan nordpolen och ekvatorn, som utgjorde själva definitionen av metern. Måttssystemet som senare skulle bli SI-systemet hade fått sin första artefakt. Samtidigt definierades kilogrammet som den massa som utgjordes av en kubikdecimeter vatten vid den temperatur då vattnet har som högst densitet, det vill säga ungefär fyra grader celsius. Eftersom det är en komplicerad process att mäta upp exakt en kubikdecimeter vatten vid dess högsta densitet göts en prototyp även för kilogrammet. Prototypen blev en cylinder i ren platina och, precis som meterprototypen kom att utgöra själva definitionen för en meter, fick kilogramcylindern bli definitionen

för kilogrammet. Länken till vattnets densitet och jordens omkrets var därmed bruten och platinacylindern som kallades arkivkilogrammet kom att få en mycket viktig roll som varande själva kilogramdefinitionen.

Att jordens omkrets ursprungligen kom att spela en så central roll i framväxten av det nya måttsystemet var inte självklart, inte ens på den tiden, men sett i backspegeln är det ändå begripligt. Himlakropparna och deras rörelser var centrala delar i den tidens vetenskap. Jorden och dess dimensioner torde ha framstått som något oföränderligt som inte skulle påverkas av tidens tand utan vara en konstant faktor som man kunde anse tillförlitlig. Det var nog ingen på 1700-talet som skulle kunna drömma om den enorma tekniska utveckling som skulle ske under de två kommande århundradena.

Under andra halvan av 1800-talet började många av världens länder att anamma det nya metriska systemet. Från att ha varit en i huvudsak fransk angelägenhet anslöt sig nu fler och fler länder till det nya måttsystemet och genom meterkonventionen år 1875 antogs det som officiellt måttsystem av den industrialiserade världens länder. Det här var en stor händelse i metrologins historia och nu göts också nya prototyper, denna gång i platina med 10% iridium, vilket visat sig ha särdeles gynnsamma egenskaper för ändamålet. Förutom de prototyper som fick utgöra definitionen av kilogrammet och metern tillverkades även ett antal kopior som delades ut bland medlemsstaterna. År 1889 kunde svenske professorn Gustaf Thalén hämta hem kilogramprototyp nummer 40 som sedan dess har varit Sveriges rikskilogram.

### Det instabila SI-systemet

Problemet med att använda sig av en artefakt som definition för en enhet är att artefakten inte är oföränderlig. Till skillnad från de naturkonstanter som vi nu valt som grund för vårt SI-system var den internationella kilogramprototypen kanske inte helt stabil. Över en tid av 130 år kan man tänka sig att cylindern plockat upp lite föroreningar som adderats till dess massa. Alternativt kan det ha skavts av lite material vid hanteringen så att cylindern istället förlorat massa. Men, eftersom den internationella kilogramprototypen ÄR själva definitionen för ett kilogram är dess massa alltid exakt ett kilogram, helt oavsett vad som tillkommit eller skavts av. Man kan tänka sig att det på 1800-talet inte utgjorde

ett så stort problem som det senare kom att bli, men ju mer man förstod om naturen och vårt universum, desto mer paradoxal blev den här definitionen.

Våra naturkonstanter, som till exempel Plancks konstant, är som namnet säger konstanta. Så vitt vi vet ändras de inte i tid och rum utan har ett visst värde som vi kan uttrycka med en siffra och en enhet. Plancks konstant betecknas  $h$  och dess magnitud är  $6,62607015 \times 10^{-34}$ . Enheten är joule  $\times$  sekund. Om definitionen för kilogrammet ändras, vilket i praktiken sker om IPK förlorar eller plockar upp massa, så kommer det numeriska värdet som beskriver Plancks konstant också att ändras något. Även om förändringen i de allra flesta fall är försumbar så är det tillräckligt för att illustrera hur paradoxalt det är att använda en instabil artefakt som definition för en enhet som i sin tur används för att beskriva vårt universum, inklusive dess naturkonstanter.

Ju djupare vi kan tränga ner i materiens minsta beståndsdelar, desto större påverkan kommer valet av definition för massaenheten att ha. En som tidigt insåg det här var James Clark Maxwell, en av elektromagnetismens förgrundsgestalter. Redan 1870, alltså redan några år innan meterkonventionen, säger Maxwell följande inför den matematiska och fysikaliska sektionen av *British Association*:

”If, then, we wish to obtain standards of length, time and mass which shall be absolutely permanent, we must seek them not in the dimensions, or the motion, or the mass of our planet, but in the wavelength, the period of vibration and the absolute mass of these imperishable and unalterable and perfectly similar molecules.”

Trots Maxwells framsynthet så blev det ändå metern, baserad på en delsträcka av jordens omkrets, som blev basen i det gemensamma måttssystemet.

## En ny definition på kilogrammet

Om vi vill komma bort från problemen förknippade med att ha en artefakt som definierar en enhet och sedan mäta en naturkonstant med hjälp av enheten given av artefakten kan vi istället bestämma oss för ett fixt värde på naturkonstanten. Vi vet att naturkonstanten inte ändras<sup>1</sup>, så den är ett bättre val som en konstant

1 Ätminstone saknas klara bevis för sådana ändringar.

referenspunkt. Egentligen hade vi kunnat välja vilket värde som helst (kanske ett jämt och fint tal som är lätt att komma ihåg) på naturkonstanterna och låta magnituden på måttsystemets enheter anpassas efter det. Tyvärr skulle ett sådant tillvägagångssätt medföra stora problem inom industri och forskning genom sin brist på kontinuitet. Att ständigt hålla på att räkna i ”det gamla kilot” och ”det nya kilot” skulle bli mycket opraktiskt; så opraktiskt att man bara tillåter en minimal skillnad mellan det gamla och det nya systemet. Det har därför varit ett nödvändigt krav inför SI-systemets revidering att naturkonstanterna ska kunna mätas upp med så stor noggrannhet, med hjälp av de gamla definitionerna av enheterna, att förändringen i magnitud hos enheterna blir försumbar efter omdefinitionen. Man måste kunna lita på att ett kilogram avser samma sak före som efter definitionen.

Ursprungligen fanns två förslag till en ny definition av kilogrammet i omlopp där det första gick ut på att definiera kilogrammet i termer av Avogadros konstant,  $N_A$ . I det gamla SI-systemet definierades enheten mol som det antal atomer av  $^{12}\text{C}$  (dvs. en kolisotop med 6 protoner och 6 neutroner i kärnan) som väger exakt 12 gram. Detta antal partiklar utgjorde en mol och antalet partiklar beskrevs av Avogadros konstant. Avogadros konstant hade före revideringen en osäkerhet som kom av osäkerheten i att experimentellt bestämma hur många atomer som fanns i 12 gram  $^{12}\text{C}$ .

Om man mäter upp Avogadros konstant med så hög noggrannhet att man kan ta beslutet att ge den ett fixt värde, *samtidigt* som man behåller definitionen att en mol  $^{12}\text{C}$  väger 12 gram går det att formulera en ny definition för kilogrammet där ett kilogram blir den massa som utgörs av  $\{N_A\} \times \frac{1000}{12}$  stycken  $^{12}\text{C}$  atomer.

Det andra förslaget, det som sedan kom att ligga till grund för omdefinieringen, baserade sig istället på kopplingen mellan kilogrammet och Plancks konstant  $h$ ; en koppling som inte är lika uppenbar för den oinvigde, men som tilltalar många fysiker på grund av Plancks konstants framträdande roll inom kvantfysiken. I det reviderade SI-systemet så har det fastställts att:

$$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad , \quad (1)$$

där enheten joulesekund också kan skrivas  $\text{kg m}^2/\text{s}$ .

Enhetsen på Plancks konstant visar på kopplingen till kilogrammet och den nya definitionen av kilogrammet lyder:

”Kilogram, beteckning kg, är SI-enheten för massa. Den definieras genom att det fastställda numeriska värdet av Plancks konstant  $h$  antas vara  $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$  när den uttrycks i enheten Js, som är lika med  $\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$ , där meter och sekund definieras med hänvisning till  $c$  och  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .”

Här är  $c$  ljusets hastighet i vakuum uttryckt i m/s och  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  frekvensen för övergången mellan de två hyperfinnivåerna i det ostörda grundtillståndet hos atomen cesium-133 uttryckt i  $\text{s}^{-1}$ .

Kort sagt kan vi lösa ut kg ur enhetsekvationen ovan genom att  $h$  har fått ett fastställt numeriskt värde och enheterna meter samt sekund uttrycks i termer av de konstanter som de definieras av. Uttrycket för kilogram i termer av naturkonstanterna blir därför:

$$1 \text{ kg} = \frac{(299\,792\,458)^2}{(9\,192\,631\,770) (6,626\,070\,15 \times 10^{-34})} \frac{\Delta\nu_{\text{Cs}} h}{c^2} . \quad (2)$$

Vi ser också att kilogrammet inte enbart definieras av Plancks konstant utan även av ljushastigheten, som (med hjälp av sekunden) ligger till grund för definitionen av en meter, och cesiumfrekvensen som ensamt definierar sekunden (se också Martin Zelans artikel i denna upplaga).

En fördel med den här definitionen är att man kan dra nytta av de elektriska enheterna ohm och volt som har direkta kopplingar till Plancks konstant. Det här är en central punkt, för lika viktigt som det är att skapa en lämpligt vald *definition* för kilogrammet, är det att kunna *realisera* densamma. Vi återkommer till detta i nästa avsnitt.

Men vad hände med metoden att bestämma storleken på kilogrammet med hjälp av Avogadros konstant och kolatomernas molmassa? Även Avogadros konstant fick ett fastställt värde vid revideringen så har vi då inte två konkurrerande sätt att bestämma kilogrammet? Jo, det hade vi fått om molen fortfarande hade definierats av att en mol  $^{12}\text{C}$ -atomer väger 12 gram, men i det reviderade SI-systemet bestäms molen direkt av Avogadros konstant:

$$N_A = 6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} , \quad (3)$$

så man definierar istället en mol av ett ämne som innehållande exakt  $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$  partiklar (se också Bengt Nordéns artikel). I och med molens nya definition väger inte längre en mol av  $^{12}\text{C}$  *exakt* 12 gram, utan kols molmassa får en experimentell osäkerhet som utgörs av hur väl man faktiskt kan väga en mol kolatomer. Då försvinner också den direkta (definitionsmissiga) kopplingen mellan molmassa och kilogram och det finns inte längre någon konflikt i att låta definitionen för kilogrammet baseras på Plancks konstant. En fördel med den här definitionen av mol är att man på så sätt skiljer på storheten *massa*, med enhet kilogram, och storheten *substansmängd*, med enhet mol, på ett mycket tydligare sätt än tidigare.

### Realisering av kilogrammenheten

När kilogrammet väl är *definierat* uppstår nästa fråga: hur det ska *realiseras*. Som tidigare nämnts räcker det inte med att besluta att kilogrammets definition ska baseras på Plancks konstant. Det måste också finnas en metod för att realisera, det vill säga få till stånd, kilogrammenheten med Plancks konstant som grund. Vi måste med andra ord kunna *realisera kilogrammet med spårbarhet till Plancks konstant*. Men i vilka sammanhang relaterade till massa finner vi Plancks konstant och hur kan vi utnyttja dessa?

Det mest direkta sambandet hittar vi på atomär nivå, där energi i form av elektromagnetisk strålning kan avges och upptas till exempel av en atom. Det här sker i diskreta ”energipaket” vars energi beskrivs av  $E = f h$ .  $E$  är energin,  $f$  frekvensen hos den elektromagnetiska strålningen och  $h$  är Plancks konstant. I denna ursprungliga form fungerar Plancks konstant som en skalfaktor mellan energi och frekvens och de små energipaketerna är vad vi kallar fotoner (ljuspartiklar).

Om man nu kombinerar Plancks ekvation med en annan välkänd ekvation, nämligen Einsteins ekvation,  $E = mc^2$ , får man följande samband:

$$m = \frac{f h}{c^2} . \quad (4)$$

Ekvation 4 kan tolkas som den massa  $m$  en kropp (t.ex. en atom) minskar med när den avger en foton med frekvensen  $f$ .

Det här direkta sambandet mellan Plancks konstant och massa har nyligen studerats av en forskargrupp på Max Planck-institutet i Tyskland, som faktiskt kunnat mäta skillnaden i massa



mellan atomer vars elektroner befinner sig i olika energitillstånd.

På grund av de oerhört små energimängder och massor det handlar om är detta samband inte användbart för att kunna mäta massa i den makroskopiska värld som vi lever i. För att länka en makroskopisk massa i ett för våra ändamål lämpligt viktintervall, till en kvantfysikalisk konstant som Plancks konstant, måste det till andra metoder.

Det går att mäta kvoten mellan Plancks konstant och den atomära masskonstanten med mycket hög noggrannhet genom olika experimentella metoder. När man gör det länkar man den mikroskopiska massan av en atom till Plancks konstant. Om man sedan tillverkar ett makroskopiskt objekt på ett sådant sätt att man vet hur många atomer som objektet är uppbyggt av så vet man inte bara massan av det större objektet, man har också spårbarhet till Plancks konstant. Det internationella så kallade Avogadroprojektet, som ursprungligen gick ut på att fastställa värdet på Avogadros konstant, arbetar numera också med att realisera kilogrammet med ovan beskrivna metod.

Det finns emellertid ett helt annat sätt att realisera ett kilogram, som inte har någonting med mikroskopiska massor att göra alls, och det är det vi pratar om när vi säger att kilogrammet nu är elektroniskt. Det elektroniska kilogrammet realiseras av en så kallad Kibblevåg där spårbarheten till Plancks konstant kommer av två *makroskopiska kvantfysikaliska fenomen*. Även om de flesta kvantfysikaliska effekter manifesteras på en extremt liten skala så finns det en del fenomen där man kan se spår av den mikroskopiska, kvantfysikaliska, världen även på makroskopisk nivå. Det handlar om fenomen inom fysiken som vi kan se eller mäta på en ”vardaglig” skala, men som kräver en kvantfysikalisk förklaring för att förstå deras ursprung. Två sådana fenomen är *kvant-halleffekten* och *Josephson-effekten* och med hjälp av dem går det att realisera enheterna ohm och volt med extremt hög noggrannhet och med spårbarhet till Plancks konstant. Vi återkommer till de här effekterna, men innan dess ska vi titta närmare på hur Kibblevågen utnyttjar de elektriska storheterna för att väga upp massan hos ett objekt.

## Kibblevågen

En anledning till att just Plancks konstant valdes som den definierande naturkonstanten för kilogrammet är att det var ett sätt

att knyta an kilogrammet till de elektriska enheterna. Eftersom Plancks konstant redan är närvarande i dessa realiseringar betyder det att om man kan utnyttja resistans och spänning för att mäta upp en massa så kan man också koppla massenheten till Plancks konstant. Det är just detta som Kibblevågen gör. Det är en våg som balanserar en mekanisk kraft som skapas av att jordens gravitation verkar på massan man vill väga, med en elektromagnetisk kraft som skapas av en strömförande spole i ett magnetfält. Eftersom kraften på spolen beror av strömstyrkan genom den kan man på elektromagnetisk väg balansera upp den mekaniska kraften genom att justera hur stor ström som spolen matas med. Principen är enkel, men att göra det på ett sätt som möjliggör en tillräckligt låg mätosäkerhet är inte trivialt. När rikskilogrammet kalibreras mot IPK i Paris kan det göras med en relativ osäkerhet  $\leq 5 \times 10^{-9}$ . Sedan adderas förvisso en viss mätosäkerhet i varje steg i kalibreringskedjan, men om en Kibblevåg ska kunna ersätta IPK får osäkerheten i det uppmätta värdet ändå inte vara större än ungefär  $3 \times 10^{-8}$ . Den här hissnande låga siffran möjliggörs av en makalös ingenjörskonst och av en snilleblix från den brittiske fysikern Bryan Kibble, en av Kibblevågens fäder, som genom ett nytt grepp lyckades eliminera den största felkällan hos Kibblevågens föregångare: amperevågen.

Om vi vill titta mer i detalj på hur det fungerar kan vi börja med själva grundprincipen, att balansera en mekanisk kraft med en elektromagnetisk kraft. Den mekaniska kraften  $F_{\text{mek}}$  verkar på vikten  $m_x$  på grund av jordens tyngdacceleration  $g$  enligt:

$$F_{\text{mek}} = m_x g \quad , \quad (5)$$

och den elektromagnetiska kraften verkar på spolen i det externa magnetfältet enligt sambandet:

$$F_{\text{el}} = I_1 l B \quad . \quad (6)$$

$I_1$  är strömmen genom spolen,  $l$  är längden på ledaren som utgör spolen och  $B$  är det externa magnetfältets flödestäthet.

När vågen är i balans är dessa båda krafter lika stora, vilket ger:

$$m_x g = I_1 l B \quad . \quad (7)$$

Redan här har vi ett samband som uttrycker massan som funktion av strömmen genom spolen, vilken i sin tur går att mäta mycket noggrant och med spårbarhet till Plancks konstant via Josephson-

### Kibblevågen – principskiss

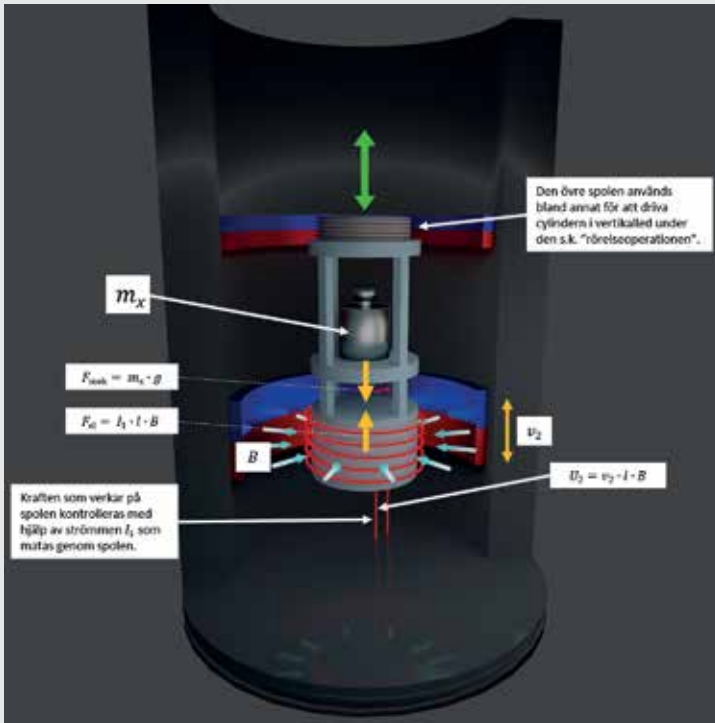


Bild: Hans He / Karin Cedergren

Figur 1: Schematisk bild av den cylinderformade, kompakta, typ av Kibblevåg som är under utveckling på NPL och som kommer att tas i bruk i Sverige. Den inre cylindern stabiliseras i horisontalled av flexibla guider som håller den på konstant avstånd från den yttre väggen, men i höjddled styrs alla rörelser av elektromagnetiska krafter. Vägningen av massan  $m_x$  sker i två steg. Först balanseras den mekaniska kraften  $F_{mek}$  mot den elektriska kraften  $F_{el}$ . I ett andra steg driver den övre spolen cylindern upp och ner med en hastighet  $v_2$  så att en spänning  $U_2$  induceras i den nedre spolen. Det resulterande uttrycket för massan kan skrivas som:

$$m_x = \frac{I_1 U_2}{g v_2} .$$

$I_1$  kan med Ohms lag uttryckas som  $U_1/R_1$  och bestäms genom att låta strömmen gå genom en resistor med känd resistans  $R_1$  (kalibrerad genom kvant-halleffekten) och mäta spänningsfallet  $U_1$  över resistorn m.h.a. Josephson-effekten. Den inducerade spänningen  $U_2$  mäts också med Josephson-effekten och  $v_2$  bestäms m.h.a interferometri med en fast monterad laser placerad i linje med centrum på cylindern. Tyngdaccelerationen  $g$  måste mätas upp på den plats Kibblevågen placeras. Mätningarna utförs i vakuum, så vågen placeras i en vakuumkammare som pumpas ur när vägningarna ska utföras.

effekten och kvanthalleffekten. Kruxet är att den här typen av mätning inte ens kommer i närheten av den noggrannhet som krävs för metrologiska ändamål, än mindre för att skapa en standard för massaenheten. Problemet ligger i att med hög precision kunna mäta längden på spolens ledare och det externa magnetfältets flödestäthet. Produkten  $lB$  utgör därmed den största osäkerheten i mätningen.

Problemet löstes av Bryan Kibble som föreslog att man istället för att försöka utföra vägningen i ett enda steg skulle införa ytterligare en process som tillsammans med den första skulle kunna eliminera  $lB$ . Om man i en separat process för spolen upp och ner i magnetfältet så induceras en spänning  $U_2$  i spolen, där spänningen är proportionell mot den hastighet  $v_2$  med vilken man rör spolen i magnetfältet. Spänningen är även proportionell mot längden på ledaren i spolen och det externa magnetfältet, precis de komponenter man vill eliminera ur ekvation 7.

Uttrycket för spänningen blir:

$$U_2 = v_2 l B \quad , \quad (8)$$

och om vi kombinerar ekvation (7) och (8):

$$m_x g v_2 = I_1 U_2 \quad . \quad (9)$$

Genom att lösa ut  $m_x$  ur ekvationen ovan får vi ett uttryck där massan beror enbart av de elektriska storheterna  $I_1$  och  $U_2$  samt tyngdaccelerationen  $g$  och spolens hastighet  $v_2$ . Vi har med andra ord eliminerat  $lB$  och istället fört in  $v_2$  och  $U_2$  i uttrycket för massan. Tack vare moderna optiska mätmetoder kan  $v_2$  mätas med mycket hög noggrannhet med hjälp av laserinterferometri. Vidare måste  $g$  mätas upp på den plats där man vill placera Kibblevägen och platsen bör väljas så att andra störningar minimeras.

Ekvation (9) visar också varför Kibblevägen tidigare har kallats wattväg. Uppställt på detta sätt inses lätt att vänstersidan representerar uttrycket för mekanisk effekt  $P_{\text{mek}} = m g v$  och högersidan representerar uttrycket för elektrisk effekt  $P_{\text{el}} = I U$ . Effektbalansen måste dock beskrivas som virtuell eftersom balansen uppkommer som en konsekvens av Kibblevägens två separata operationer.

Om vi återigen tittar på ekvation (9) och använder Ohms lag,  $I = U/R$ , går det att bestämma strömmen  $I_1$  genom spolen genom att leda den vidare genom en resistor med känd resistans  $R_1$  och mäta spänningen  $U_1$  som utvecklas över resistorn. Vi kan då skriva

om uttrycket för massan  $m_x$  som:

$$m_x = \frac{U_1 U_2}{R_1 g v_2}, \quad (10)$$

som uttrycks i enheterna:

$$\left[ \frac{V^2}{\Omega \frac{m}{s^2} \frac{m}{s}} \right], \quad (11)$$

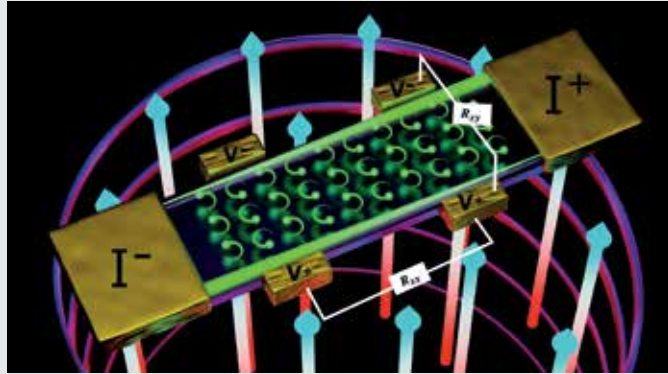
där  $V$  betecknar volt,  $\Omega$  är resistansenheten ohm och gravitationsaccelerationen och hastigheten uttrycks i meter per sekundkvadrat respektive meter per sekund.

### Kibblevägens spårbarhet bygger på kvantfysik

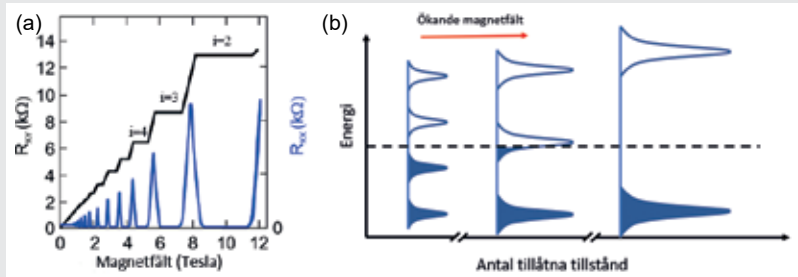
Kibblevägen är ett fantastiskt stycke ingenjörskonst. För att kunna väga upp något med en noggrannhet som tangerar det obegripliga, osäkerheten i mätningen när vi väger upp ett kilogram får inte överstiga trettio miljondelars gram, krävs att varje detalj i vågen är noga utprovad och genomtänkt. Symmetrier i utformning och mätprocedurer används i så stor utsträckning som möjligt för att eliminera potentiella mätfel, men det är ändå kopplingen mellan de elektriska storheterna och Plancks konstant som gör det möjligt att realisera kilogrammet på det här sättet. De resulterande enheterna i uttrycket för massa som kommer ur Kibblevägens mätningar (11), måste stämma överens med kilogrammets definition (2) och det är här kvanthalleffekten och Josephson-effekten kommer in.

**Kvanthalleffekten** upptäcktes 1980 av den tyske fysikern Klaus von Klitzing och redan 1985 belönades upptäckten med ett Nobelpris. Upptäckten har haft stor påverkan på hur vi realiserar resistansenheten och mer om det går att läsa om i "Säkrare volt och ohm" av Håkan Nilsson och John Vallin i Kosmos 1988. I korthet uppträder kvanthalleffekten i tvådimensionella material vars ledningsförmåga bärs av fria laddningar (elektroner eller "hål") och som utsätts för ett starkt magnetfält. Den klassiska Halleffekten hade varit känd sedan slutet av 1800-talet och fått namn efter den amerikanske fysikern Edwin Hall som upptäckte att det utvecklas en transversell spänning i en strömförande ledare om denna utsätts för ett, mot strömriktningen, vinkelrätt magnetfält. Den transversella spänningen, också kallad Hallspänning, uppstår på

## Kvanthalleffekten utnyttjas som resistansstandard



Figur 2: Visualisering av kvant-halleffekten i en Hall-ledare bestående av en tvådimensionell elektrongas som befinner sig i ett starkt magnetfält, genererat av spolen i bilden. Vid tillräckligt höga fältstyrkor kommer elektronerna i de centrala delarna av ledaren att röra sig i kvantiserade cirkelbanor i så kallade cyklotronorbitaler. De enda nettoströmmar som kan finnas i provet är lokaliserade till ledarens kanter. Figuren visar strömkontakterna i ändarna på Hall-ledaren och spänningsproberna på långsidorna. Då de fria laddningarna i ledaren fyller precis ett helt antal Landau-nivåer (se figur 3) går den longitudinella resistansen  $R_{xx}$  mot noll och den transversella resistansen  $R_{xy}$  är kvantiserad enligt:  $R_{xy} = h/i e^2$ . (Bild: Hans He/Karin Cedergren)



Figur 3: (a) Grafen visar den transversella resistansen (Hallresistansen)  $R_{xy}$ , respektive den longitudinella resistansen  $R_{xx}$  som funktion av magnetfältet. När laddningarna börjar röra sig i cirkelbanor kommer energitillstånden att kvantiseras i Landau-nivåer som sedan ändrar utseende allteftersom magnetfältet ökas. När ett helt antal Landau-nivåer är fyllda är Hallresistansen kvantiserad och man befinner sig på en av plattåerna i grafen. (b) Landau-nivåernas utseende ändras med ökat magnetfält. Ju högre magnetfält desto fler laddningar får plats i varje Landau-nivå. I ett idealt fall skulle Landau-nivåerna inte ha någon utbredning i energi (d.v.s. i  $y$ -riktningen) utan nivåer skulle bestå av en linje med konstant energi. Dock finns det i alla reella system en viss avvikelser från detta och därför breddas Landau-nivåerna något i energi. (Bild: Hans He/Karin Cedergren)

grund av att alla laddade partiklar som rör sig i ett magnetfält påverkas av Lorenzkrafter som gör att laddningarna i ledaren viker av från sin nominella bana i ledarens strömriktning och ett laddningsöverskott bildas längs ledarens ena sida. Längs ledarens andra sida genereras ett motsvarande laddningsunderskott. Detta skapar i sin tur ett elektrostatiskt fält mellan sidan med laddningsöverskott och sidan med laddningsunderskott, vilket motverkar elektronernas tendens till transversell rörelse. Den motverkande elektrostatiska kraften på laddningarna gör att man efter ett tag får en jämviktssituation med en viss utvecklad Hallspänning,  $V_H$ , som direkt beror av strömmen genom ledaren och det pålagda magnetfältet.

Om ledaren görs tvådimensionell så begränsas elektronernas rörelser till planet och en ny situation uppstår. Istället för att Hallspänningen,  $V_H$ , förändras linjärt med magnetfältet så kommer det, under förutsättning att strömmen är konstant, att bildas plåtår med konstant värde på spänningen. När magnetfältet ökas tillräckligt mycket hoppar Hallspänningen från en nivå till nästa. På plåtåren är resistansen alltid kvantiserad till delar av  $h/e^2$ , där  $h$  är Plancks konstant och  $e$  är elementarladdningen. Resistansen på plåtåren beror med andra ord bara av dessa två naturkonstanter och går att mäta med mycket stor noggrannhet. Här kan det vara värt att notera att när man pratar om Hallresistans så tittar man på den transversella spänningen i  $y$ -led i förhållande till den ström som man skickar genom provet i  $x$ -led, d.v.s:

$$R_H = \frac{U_y}{I_x} . \quad (12)$$

Hallresistansen betecknas därför ibland som  $R_{xy}$  för att skilja den från den resistans som man får genom att mäta resistansen i  $x$ -riktning på provet och som betecknas  $R_{xx}$ .

Ursprunget till plåtåren och deras kvantiserade resistans kan inte förklaras med mindre än att introducera några kvantfysikaliska begrepp, eftersom det är en makroskopisk manifestation av de underliggande kvantfysikaliska lagarna. Det är framför allt två kvantkoncept som styr elektronernas beteende i den aktuella situationen; dels är det våg-partikeldualiteten som säger att alla elementarpartiklar har både partikelliknande och vågliknande egenskaper och därför matematiskt kan beskrivas av en vågfunktion, dels är det Pauliprincipen som säger att om partiklarna är fermioner (elektroner är fermioner) så kan flera partiklar inte besätta samma kvanttillstånd.

Våg-partikeldualiteten medför att det bara är vissa cirkelbanor som är tillåtna eftersom en cirkelbana måste motsvara ett helt antal våglängder av den vågfunktion som beskriver partikeln. Resultatet blir kvantiserade energinivåer, så kallade Landaunivåer, där de olika nivåerna motsvarar olika antal våglängder. Antalet kvanttillstånd för varje energinivå är begränsat av den laterala utbredningen på ledaren och densiteten av kvanttillstånd bestäms av hur starkt magnetfältet är. Ju starkare magnetfält desto fler elektroner får plats i varje nivå och det är i förlängningen detta som skapar kvanthalleffekten. Det är när vi befinner oss mellan två Landaunivåer som platån i Hallspänningen uppstår.

När magnetfältet ökas så mycket att elektronernas banor blir cirkulära och Landaunivåerna uppstår kommer de fria elektroner som är ansvariga för strömtransporten i provet att besätta Landaunivåerna ”nerifrån och upp”. Det vill säga nivåerna med lägst energinivå fylls upp först. När magnetfältet ökas kan varje Landaunivå innehålla fler elektroner och eftersom antalet fria elektroner i ledaren inte förändras så kommer det att behövas färre och färre nivåer för att ge plats till samtliga fria elektroner. Antalet fyllda Landaunivåer ändras därför med magnetfältet och vid tillräckligt låg laddningsdensitet (d.v.s. antal fria elektroner i ledaren i förhållande till ledarens storlek) och tillräckligt högt magnetfält kan alla laddningar besätta den lägsta nivån.

Så vad händer egentligen med strömmen när vi befinner oss på en platå? Laddningarna i Landaunivåerna i de centrala delarna av ledaren bidrar inte till ledningsförmågan eftersom de inte medger en nettotransport av elektroner. I kanterna däremot kan inte elektronerna röra sig i cirkulära banor på grund av att ledarens begränsade laterala utbredning inte tillåter detta. De tillåtna kvanttillstånden för elektronerna i kanterna ser därför annorlunda ut och precis som i en vanlig ledare är elektronerna i dessa inte lokaliserade till en viss plats, utan kan röra sig från ena strömkontakten till den andra. Dock med en stor skillnad: tillstånden i kanterna, som är en effekt av magnetfältet, tillåter bara strömtransport i en riktning.

Den riktningsberoende strömtransporten är en av hörnstenarna i den kvantiserade Halleffekten eftersom den medför att resistansen längs en sida på kvanthallprovet blir i det närmaste noll. Den enkelriktade strömtransporten i samverkan med att distansen mellan de två kanterna är relativt stor gör att resistansen



försviner för den ström som transporteras där. Resistans uppstår då laddningsbärare kolliderar (med varandra, med kristallgittret eller med orenheter i materialet) och på grund av kollisionen rör sig från sin nominella riktning (strömriktningen). För att en elektron som rör sig längs ena kanten skulle kunna knuffas ur sin nominella transportriktning så skulle det krävas att kollisionen medför att den skickas iväg till provets andra sida. Sannolikheten för att det ska inträffa blir mindre ju bredare kvanthallprovet är eftersom den fysiska distansen är det som håller de respektive riktningarna åtskilda. Om temperaturen dessutom är tillräckligt låg för att gittervibrationerna ska dämpas så kommer sannolikheten för att en sådan process ska kunna ske bli mycket liten och resistansen längs provets kant blir noll. Det medför också att man inte får något spänningsfall längs kanten, vilket i sin tur betyder att kantens potential kommer att vara densamma som potentialen för den strömkontakt laddningen rör sig från. Resistans uppstår först när elektronen ska matas in i motsatta sidas strömkontakt och spänningsskillnaden mäter vi därmed först när vi mäter spänningen mellan de två långsidorna, det vill säga Hallspänningen.

Men varför blir denna spänning kvantiserad? Jo, på liknande sätt som man får olika Landaunivåer för elektronerna i centrum av provet skapas flera olika ”kanaler” för strömtransport i kanterna. För varje Landaunivå får vi också en strömförande kanal i kanten av provet. Vi vet också att varje kanal tömmer sina elektroner i motsatt strömkontakt och varje kanal är därför behäftad med en specifik ”tömningsresistans” just invid kontakten. Denna resistans kan uttryckas i termer av enbart elektronens laddning och Plancks konstant, den så kallade von Klitzingkonstanten:

$$R_K = \frac{h}{e^2} \approx 25\,812,807\,46 \, \Omega \quad . \quad (13)$$

Har man många kanaler längs kanten så motsvarar det följaktligen en strömkrets med flera parallellkopplade resistorer och generellt fås för Hallresistansen:

$$R_H = \frac{R_K}{i} = \frac{h}{ie^2} \quad , \quad (14)$$

där  $i$  är antalet fyllda Landaunivåer, som i sin tur motsvarar vilken plåt vi befinner oss på, uppifrån räknat.

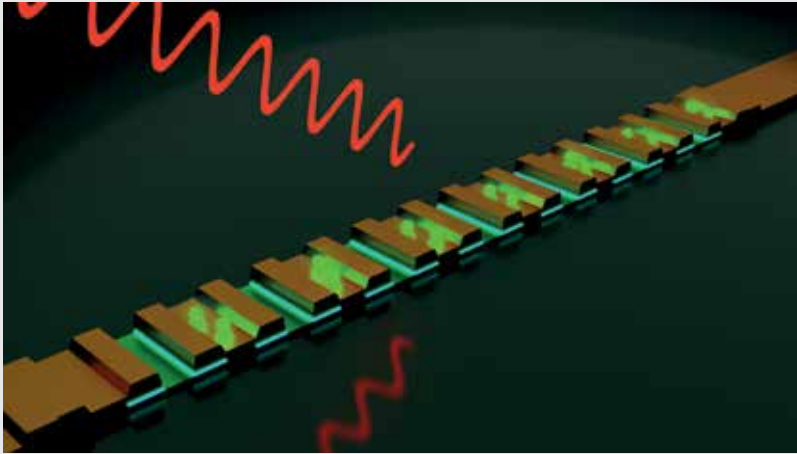
**Josephson-effekten** relaterar i sin tur elektrisk spänning till Plancks konstant och är den metod som används för att realisera spänningseenheten volt. Josephson-effekten uppstår när två supraleddande elektroder separeras av en tunn potentialbarriär som till exempel kan bestå av en isolator eller en vanlig, icke supraleddande metall. I en supraleddare sker laddningstransporten av par av elektroner, så kallade Cooperpar och eftersom dessa, till skillnad från elektroner, är bosoner så kan de alla samexistera på den lägsta energinivån. Pauliprincipen gäller endast för fermioner. Resultatet blir ett kondensat av Cooperpar, som rör sig koherent genom ledaren och därmed saknar resistans. Supraleddning uppstår bara i vissa material och bara vid såpass låga temperaturer att gittervibrationerna inte är så stora att de kan dela upp ett Cooperpar. I vanliga fall hade man kunnat förvänta sig att en potentialbarriär skulle ge upphov till resistans, men precis som Brian Josephson förutspådde 1962 och sedermera fick Nobelpriset för, kan en ström flyta helt resistanslöst även genom barriären om denna är tillräckligt tunn och strömmen tillräckligt liten. Den resistanslösa strömmen i en supraleddare kan alltså utvidgas till att omfatta även potentialbarriären så att inget spänningsfall uppstår. Dessutom, om en konstant spänning läggs på över potentialbarriären, så kommer strömmen att oscillera med en frekvens  $f$  som beror av den pålagda spänningen  $V$  enligt:

$$f = \frac{2eV}{h} \quad . \quad (15)$$

Denna effekt kallas a.c.-Josephson-effekten.

Om man nu går ett steg längre och med hjälp av en vågledare sänder mikrovågor så att även en a.c.-spänning läggs över Josephsonövergången blir resultatet att supraströmmar uppstår även vid vissa bestämda spänningar skilda från noll. Om man plottar strömmen som en funktion av den pålagda spänningen över Josephsonövergången så syns den supraleddande strömmen som spikar i ström-spänningskaraktistiken vid vissa specifika spänningar. Dessa uppstår när energin hos ett supraleddande elektronpar,  $2eV$ , matchar fotonenergin  $hf$  i den elektromagnetiska strålning som utgörs av de pålagda mikrovågorna.  $h$  är återigen Plancks konstant och  $f$  är nu frekvensen på mikrovågsstrålningen. Den observerade effekten kallas på engelska för "Josephson inverse a.c. effect" eller den inverterade Josephson a.c.-effekten och spikarna för "Shapiro spikes".

### Josephsoneffekten som spänningsstandard



Figur 4: Visualisering av hur Cooperpar med laddningen  $2e$  rör sig genom en enkel array av seriekopplade Josephsonövergångar. Potentialbarriärerna skapas ofta genom att man först tillverkar de undre elektroderna, vars yta sedan får oxidera. När topelektroderna därefter kommer på plats utgörs Josephsonövergången av den oxiderade regionen (här illustrerad i ljusblått) mellan elektroderna. När arrayen tillåts att koppla till de pålagda mikrovågorna uppstår de konstanta spänningssteg som utnyttjas vid realiseringen av spänningseenheten. (Bild: Hans He)



Figur 5: (a) Skissen visar ett typiskt utseende för spänningsstegen som brukar kallas "zero crossing steps" i en array med hög shuntresistans och kapacitans. I (b) syns en oscilloskopbild som visar hur det ser ut då yttre störningar gör att spänningen över arrayen hoppar mellan de olika spänningsstegen. Arrayer som bygger på metoden att utnyttja "zero crossing steps" är till sin natur instabila och är därför mer utmanande att använda. Fördelen är å andra sidan en mycket tillförlitlig kvantisering av stegen. (c) En oscilloskopbild av en programmerbar array som uppvisar ett stabilt spänningssteg. (Bilder: Gunnar Eklund/Karin Cedergren)

Om spänningskällans impedans är mycket högre än Josephsonövergångens så blir det i praktiken ofta mer realistiskt att se det som att Josephsonövergången matas av en strömkälla. Detta leder till *steg* i ström-spänning-karakteristiken snarare än spikar. Stegen kallas Shapirosteg och uppträder vid samma spänningar som spikarna. Då en Shapirospik eller ett Shapirosteg uppträder vet man följaktligen vilken spänning man har över övergången med en mycket hög noggrannhet i enlighet med uttrycket:

$$V = n \frac{hf}{2e} \quad , \quad (16)$$

där  $n$  är ett heltal som anger stegnumret. Vet vi vilket steg  $n$  vi befinner oss på vet vi också vilken spänning vi har om vi känner till frekvensen  $f$  på mikrovågorna. Redan här har vi alltså ett sätt att relatera spänning till relevanta naturkonstanter, men problemet med att använda enstaka Josephsonövergångar är att spänningen blir mycket liten: bara några få millivolt.

För att skapa spänningsreferenser vid högre spänningar seriekopplas flera Josephsonövergångar i vad man kallar en Josephson-array. De första arrayer som tillverkades för ändamålet byggde på att varje Josephsonövergång drevs av en individuell ström så att varje övergång befann sig på samma konstanta spänningssteg. Den individuella strömbiasen gjorde det av praktiska skäl svårt att utnyttja arrayer med fler än 20 Josephsonövergångar. Problemet löstes i slutet av 70-talet då det föreslogs att man skulle kunna utnyttja arrayer där övergångarna var behäftade med hög shuntresistans och stor kapacitans. För arrayer med den typen av övergångar så krävs ingen individuell bias och man erhåller en ström-spänningkurva med tydliga, hysteretiska, spikar vid de spänningsvärden som ges av ekvation (16). Shapirospikarna hos den här typen av arrayer korsar ström-axeln på grafen och har därför blivit kända som "zero crossing steps". På grund av det hysteretiska beteendet så finns det inte heller någon möjlighet för spänningen att anta värden mellan spikarna (i denna tillämpning typiskt kallade steg) utan spänningen i denna typ av arrayer är mycket väl kvantiserad. De drivs vanligtvis med mycket små biasströmmar som kan vara nära noll och när man väl befinner sig på ett steg räcker det med enbart mikrovågskällan för att upprätthålla den konstanta spänningen. I mitten av 80-talet byggdes den första spänningsreferensen som utnyttjade den här metoden och denna typ av array används än i dag för spänningsreferenser upp till 10 volt. En

stor fördel med den här metoden är att eftersom den kan upprätthålla en konstant spänning utan strömbias så är kvantiseringen av spänningen mycket pålitlig. Eftersom Plancks konstant,  $h$ , och elementarladdningen,  $e$ , numera har fastställda numeriska värden utan någon osäkerhet så beror osäkerheten i värdet på spänningen enbart på hur väl vi känner frekvensen på mikrovågorna, något som kan mätas med en osäkerhet som är mindre än  $1 \times 10^{-10}$ . Nackdelen är att arrayen är instabil och lätt påverkas av yttre störningar som gör att den ofta hoppar mellan olika spänningsnivåer.

Förbättrade tillverkningsmetoder gjorde det så småningom möjligt att tillverka arrayer där Josephsonövergångarna var så lika att det gick att gå tillbaka till icke-hysteretiska övergångar med låg shuntresistans och kapacitans. Om övergångarna kan göras identiska och mikrovågorna kan distribueras jämnt över hela arrayen, så går det att genom en gemensam strömbias låta alla övergångar lägga sig på samma spänningssteg. Denna typ av arrayer brukar kallas programmerbara eftersom man genom att leda en ström genom olika segment av den får den att anta olika spänningsvärden. De programmerbara arrayerna är lättare att hantera och är betydligt mindre känsliga för yttre störningar. Nackdelen är istället att de drivs av en biasström och därför inte är lika frikopplade från det övriga systemet som de hysteretiska arrayerna. För en spänningsreferens på 10 volt används arrayer med minst 20 000 Josephsonövergångar vid en frekvens på runt 70 GHz. Det finns även system där betydligt lägre frekvenser utnyttjas och då krävs fler övergångar, upp emot 260 000.

Gemensamt för alla arrayer är att de används för att skapa en konstant spänning (Josephsonspänning) som är känd med mycket hög noggrannhet. En okänd spänning som man vill kunna mäta kan därför bestämmas genom att man via en elektrisk brygga jämför den med den kända Josephsonspänningen. Därmed kan även en okänd spänning bestämmas med spårbarhet till  $h$ ,  $e$  och  $f$ , vilket är det som utnyttjas i Kibblevågen.

## Dimensionsanalys av Kibblevågen

När vi nu har uttryckt både ohm och volt i fundamentala naturkonstanter kan vi återigen titta på enheterna i uttrycket för massan  $m_x$  i ekvation (11) som vägs upp av Kibblevågen och uttrycka alla ingående enheter i de naturkonstanter som de definieras av. Vi minns att sekund uttrycks via cesiumfrekvensen,  $1/\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , och meter

definieras via ljushastigheten  $c$  så att meter kan uttryckas i  $c/\Delta\nu_{Cs}$ , båda med ett numeriskt värde framför som beror av de värden som naturkonstanterna givits. Sätter vi in uttrycken som definierar varje enhet istället för enheten själv kan vi göra en dimensionsanalys som visar att:

$$\left[ \frac{\text{V}^2}{\Omega \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right] = \left\{ \frac{\Delta\nu_{Cs} b}{c^2} \right\}, \quad (17)$$

vilket är precis det eftersökta uttrycket som visar att Kibblevägen realiserar viktenheten kilogram, helt i enlighet med kilogrammets definition i ekvation (2).

### Det svenska kilogrammet och kilogrammet i framtiden

I Sverige har en av de ursprungliga kopiorna till den internationella kilogramprototypen (IPK) använts till att upprätthålla kilogrammenheten ända sedan slutet av 1800-talet. Den nationella prototypen, K40, befinner sig inlåst i ett säkert valv i källaren på RISE - Research Institutes of Sweden i Borås. *Här finns den svenska riksmätplatsen för massa.* Ungefär var 30:e år transporteras K40 ner till Paris för att jämföras med IPK. Var 6:e-8:e år får K40 i sin tur vara referens för de viktnormaler som sedan används på riksmätplatsen för att utföra de kalibreringar på högsta nivå som ingår i den dagliga verksamheten. I framtiden kommer Sverige istället att realisera massaenheten på plats i Borås med hjälp av en Kibbleväg som just nu är under uppbyggnad i samarbete med National Physical Laboratory (NPL) i London. NPL har lång erfarenhet av Kibblevägar och det var här som den allra första byggdes på 70-talet. Långt innan den kom på tal som en ny realisering av kilogrammet användes den bland annat för att mäta den gyromagnetiska kvoten hos protoner i vatten. Senare blev den ett oundgängligt verktyg för mätningar av Plancks konstant med en allt högre noggrannhet, inte minst för att möjliggöra 2019 års revidering av SI-systemet.

I dag finns det en handfull Kibblevägar runt om i världen, alla med lite olika utformning och karaktär, och Sveriges Kibbleväg kommer att bygga på en ny kompakt designidé som lagts fram av forskare på NPL, just med tanke på att skapa en robust och lättillgänglig realisering av kilogrammet. Sveriges kilogram kommer alltså att bli ett elektroniskt kilogram.

En stor fördel med den nya definitionen av kilogrammet är dock att man inte längre är bunden till en specifik metod för kilogramrealiseringen. Så länge realiseringen sker i enlighet med definitionen för kilogrammet och kan utföras med tillräckligt hög noggrannhet så är det *en godkänd metod*. Just nu banar vi väg för det elektroniska kilogrammet, men vem vet hur det kommer att se ut om ytterligare 200 år. Det enda vi med tillförsikt kan förutspå är att det med stor sannolikhet kommer att väga just ett kilogram. ❖

## För vidare läsning

*Foundation for the redefinition of the kilogram*, Philippe Richard et al, Metrologia **53**, A6 (2016)

*The watt or Kibble balance: a technique for implementing the new SI definition of the unit of mass*, Ian A Robinson and Stephan Schlamming, Metrologia **53**, A46 (2016)

*The Kibble balance and the kilogram*, Stephan Schlamming and Darine Haddad, Comptes Rendus Physique **20**, 55 (2019)

*Quantum Hall Effect: Discovery and Application*, Klaus von Klitzing, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **8**, 13 (2017)

*Josephson voltage standards*, Clark A. Hamilton, Rev. Sci. Instrum., **71**, 3611 (2000)

