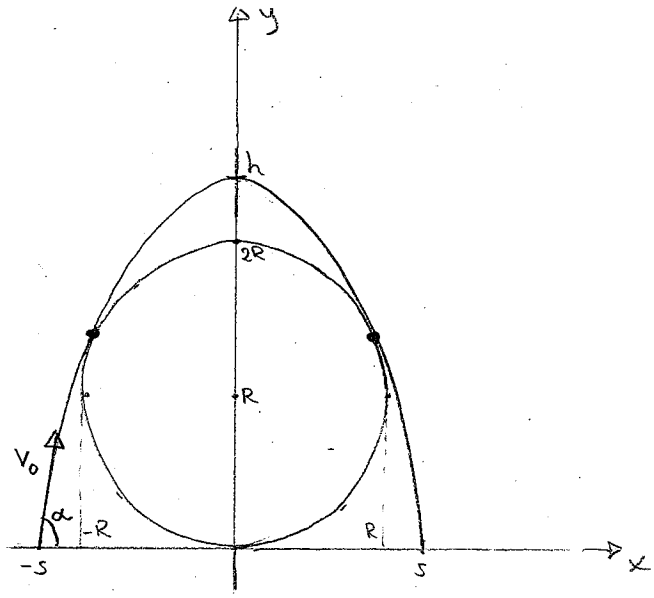
M3 - Gräshoppan

Inför koord. system enl. figur. Kasthöjden blir då $h \geq 2R$ och kastlängden blir $2s \geq 2R$. Låt begynnelsefarten vara v_0 med kastvinkel α från marken.



Kaströrelselagar:

$$\begin{cases} x = -s + v_0 \cos\alpha \cdot t & (1) \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} & (2) \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt & (3) \end{cases}$$

Låt t_{tot} vara total kasttid. Vi får från (1):

$$s = -s + v_0 \cos\alpha \cdot t_{tot}$$

$$t_{tot} = \frac{2s}{v_0 \cos\alpha}.$$

Av symmetriskäl är $y = h$, $v_y = 0$ då $t = \frac{t_{tot}}{2}$. Insättning i (2) ger

$$h = v_0 \sin\alpha \frac{s}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{s}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$= s\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gs^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (4)$$

samt i (3) ger

$$0 = v_0 \sin\alpha - \frac{gs}{v_0\cos\alpha} \qquad (5)$$

Omskrivningar av (4) och (5):

$$\begin{cases} 2hv_0^2\cos^2\alpha = 2v_0^2 s \cdot \sin\alpha\cos\alpha - gs^2 & (4) \\ v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha = gs & (5) \end{cases}$$

Insättning av (5) i (4) ger

$$2hv_0^2\cos^2\alpha = 2gs^2 - gs^2$$
$$= gs^2 \qquad (6)$$

Dividera (5) med (6), ger

$$\frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2hv_0^2\cos^2\alpha} = \frac{gs}{gs^2}$$

$$\frac{1}{2h}\tan\alpha = \frac{1}{s}$$

$$\tan\alpha = \frac{2h}{s}$$

Detta ger i (6):

$$v_0^2 = \frac{gs^2}{2h\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{gs^2}{2h}\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{gs^2}{2h}(1 + \tan^2\alpha)$$

$$= \frac{gs^2}{2h}\left(1 + \left(\frac{2h}{s}\right)^2\right)$$

$$= g\left(\frac{s^2}{2h} + 2h\right) \qquad (7)$$

Vi har alltså lyckats eliminera vinkeln α och har fått ett uttryck för v_0 i termer av endast s och h.

Vi vill förstås ha v_0 som funktion av bara en variabel, så att vi kan minimera v_0 m.h.a. derivata.

Vi har ännu inte utnyttjat att parabelns form är begränsad av cirkeln. För att minimera v_0 vill vi ju ha en kastparabel som tangerar cirkeln någonstans. Detta kommer ge oss ett samband mellan s och h.

Samband mellan s och h

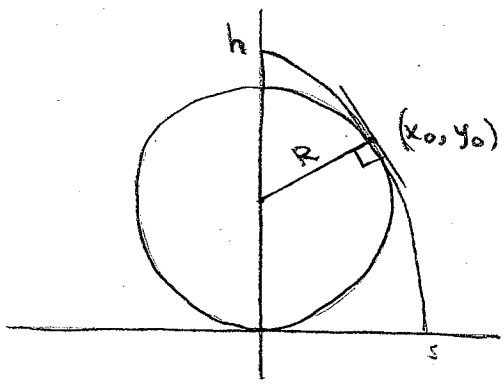
Det som kanske hade legat närmast till hands vore att kräva

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases}$$

för de två kurvorna som ska tangera, parabeln och cirkeln, men det blir ganska jobbiga räkningar.

Bättre:

Utnyttja att tangenten i pkten (x_0, y_0) är $\perp$ mot en linje från $(0,R)$ till punkten. Se figur:



Parabelns ekvation kan skrivas

$$y = h\left(1 - \left(\frac{x}{s}\right)^2\right) = h - \frac{h}{s^2}x^2$$

så speciellt i punkten (x_0, y_0)

$$y_0 = h - \frac{h}{s^2}x_0^2. \qquad (8)$$

Eftersom

$$y' = -\frac{2hx}{s^2}$$

blir tangentlutningen i (x_0, y_0)

$$k_1 = -\frac{2hx_0}{s^2}.$$

Normalens lutning k_2 uppfyller

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}, \text{ ty normal} \perp \text{tangent}$$

$$k_2 = \frac{s^2}{2hx_0}.$$

I så fall får linjen genom $(0,R)$ och (x_0, y_0) följande ekvation

$$y = \frac{s^2}{2hx_0}x + R.$$

Insättning av (x_0, y_0) i denna ekv. ger

$$y_0 = \frac{s^2}{2hx_0}x_0 + R$$

$$= \frac{s^2}{2h} + R. \qquad (9)$$

Dessutom kräver vi ju att (x_0, y_0) befinner sig på avståndet R från pkten $(0,R)$, så

$$x_0^2 + (y_0 - R)^2 = R^2 \qquad (10)$$

Insättning av (9), $y_0 - R = \frac{s^2}{2h}$ i 10 ger:

$$x_0^2 + \left(\frac{s^2}{2h}\right)^2 = R^2$$

d v s $x_0^2 = R^2 - \frac{s^4}{4h^2}$. (11)

Insättning i (8) ger:

$$y_0 = h - \frac{h}{s^2}\left(R^2 - \frac{s^4}{4h^2}\right)$$

$$= h - \frac{hR^2}{s^2} + \frac{s^2}{4h}$$

(9) ger i denna ekv.

$$\frac{s^2}{2h} + R = h - \frac{hR^2}{s^2} + \frac{s^2}{4h}$$

$$\frac{s^2}{4h} + (R - h) + \frac{hR^2}{s^2} = 0$$

$$s^4 - 4h(h-R)s^2 + 4h^2R^2 = 0$$

Detta är en andragradsekvation i s^2, vi får

$$s^2 = 2h(h-R) \pm \sqrt{(2h)^2(h-R)^2 - 4h^2R^2}$$

$$= 2h(h-R)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{(h-R)^2}}\right]$$

$$= 2h(h-R)\left[1 \pm \frac{\sqrt{h^2 - 2hR}}{h-R}\right] \qquad (h > R)$$

Här får vi 2 lösningar till s^2. Vad ska det betyda?

Vi testar de två lösningarna för t ex $h = 3R$. Då:

$$s = \pm 2\sqrt{3}\sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}\,R$$

dvs $s \approx \pm 4.7R$

eller $s \approx \pm 1.3R$

och inser att det större värdet på s är helt orimligt. Insättning av detta större s i (11) ger ett negativt x_0^2, vilket vi inte kan tillåta. Man kan även visa att det större s-värdet är ogiltigt för allmänna h.

Alltså får vi

$$s^2 = 2h(h-R)\left[1 - \frac{\sqrt{h^2-2hR}}{h-R}\right].$$

Nu sätter vi in s^2 i uttrycket (7)

$$v_0^2(h) = g\left(\frac{2h(h-R)\left(1-\frac{\sqrt{h^2-2hR}}{h-R}\right)}{2h} + 2h\right)$$

$$= g\left(h-R-\sqrt{h^2-2hR}+2h\right)$$

$$= g\left(3h-\sqrt{h^2-2hR}-R\right)$$

$$v_0^{2\prime}(h) = g\left(3 - \frac{2h-2R}{2\sqrt{h^2-2hR}}\right)$$

Sätt $v_0^{2\prime}(h) = 0$.

$$0 = g\left(3 - \frac{h-R}{\sqrt{h^2-2hR}}\right)$$

$$3\sqrt{h^2-2hR} = h-R$$

$$\Rightarrow$$

$$9h^2 - 18hR = h^2 - 2hR + R^2$$

$$8h^2 - 16hR - R^2 = 0$$

$$h^2 - 2hR - \frac{R^2}{8} = 0$$

$$h = R \pm \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{8}}, \quad h > 2R$$

$$= R\left(1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$$

För att kontrollera att detta h ger minimum för $v_0^2(h)$ beräknar vi $v_0^{2\prime\prime}(h)$ och sätter in $h = R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$

Vi finner då att

$$v_0^{2\prime\prime}\left(h = R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\right) = \ldots = \frac{R^2}{(h^2-2hR)^{3/2}} > 0$$

så vi har verkligen funnit ett minimum för v_0.

$$v_0^2\left(h = R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= g\left(3R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) - \sqrt{R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\left(R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)-2R\right)} - R\right)$$

$$= gR\left(2 + \frac{9}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)}\right)$$

$$= gR\left(2 + \frac{9}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{9}{8}-1}\right)$$

$$= gR\left(2 + \frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= gR\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= \underline{\underline{2(1+\sqrt{2})gR}}$$

Vi får alltså

$$\boxed{v_{0,min} = \sqrt{2(1+\sqrt{2})gR}}$$

$$v_{0,min} \approx 2.2\sqrt{gR}.$$

Låt oss också för skojs skull redovisa vad h, s och α skall vara:

$$h = R\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \approx \underline{\underline{2.06R}}$$

(strax över stocken alltså).

Insättning av detta h i uttrycket för s^2 ger

$$s^2 \approx 2.91R^2$$

$$s \approx \underline{\underline{1.7R}}$$

Från $\tan\alpha = \frac{2h}{s}$ får vi

$$\alpha = \underline{\underline{67.5^\circ}}.$$

Tangeringspunkten blir via (9) och (11)

$$(x_0, y_0) \approx \underline{\underline{(0.71R, 1.71R)}}$$