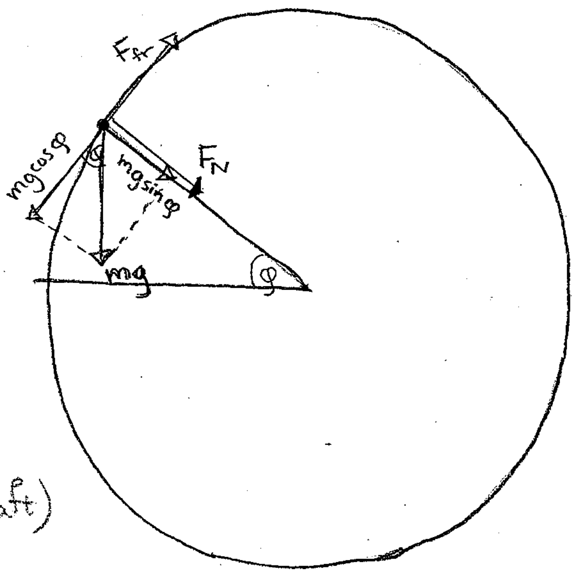
$\boxed{\text{M6}}$ – Hamstern

Lösning utan användning av accelererat koord. system

Betrakta en godtycklig punkt på övre halvcirkeln, det räcker också att studera vänster sida, så $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Vid vilken vinkel φ måste μ vara störst, för att undvika glidning?



Från krafterna i figuren får vi

$$\begin{cases} mg\cos\varphi = F_{fr} & \text{(undviker glidning)} \\ mg\sin\varphi + F_N = m\omega^2 r & \text{(agerar centripetalkraft)} \end{cases}$$

Vi får då

$$\mu = \frac{F_{fr}}{F_N} = \frac{mg\cos\varphi}{m\omega^2 r - mg\sin\varphi} = \frac{g\cos\varphi}{\omega^2 r - g\sin\varphi}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Vi undersöker vilket φ som ger μ maximalt:

$$\mu'(\varphi) = \frac{-g\sin\varphi(\omega^2 r - g\sin\varphi) + g\cos\varphi\, g\cos\varphi}{(\omega^2 r - g\sin\varphi)^2} \underset{\text{kräv!}}{=} 0$$

$$-g\omega^2 r\sin\varphi + g^2\sin^2\varphi + g^2\cos^2\varphi = 0$$

$$g^2 - g\omega^2 r\sin\varphi = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Man finner teckenväxlingen (utför!)

φ		$\arcsin\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right)$	
$\mu'(\varphi)$	+	0	−
$\mu(\varphi)$	↗	lok. max	↘

Så $\mu\left(\sin\varphi = \frac{g}{\omega^2 r}\right)$ ger max.

Vi får (m.h.a. $\cos\varphi = \underset{(-)}{+}\sqrt{1-\sin^2\varphi}$):

$$\mu = \frac{g\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right)^2}}{\omega^2 r - g\frac{g}{\omega^2 r}} = \frac{g\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right)^2}}{\omega^2 r\left(1-\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right)^2\right)} = \frac{g}{\omega^2 r\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 r}\right)^2}}$$

$$= \frac{g}{\sqrt{\omega^4 r^2 - g^2}}$$

Eftersom $F_N = m\omega^2 r - mg\sin\varphi \geq 0$ finner vi att tecknet under rottecknet är ok (blir inte negativt).

Vi noterar också att för långsammast tänkbara rotation,

$$\omega^2 r - g \to 0^+$$

får vi $\sin\varphi = \frac{g}{\omega^2 r} \to 1$ dvs $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, dvs det är i toppläget som μ behöver vara stor, närmare bestämt behövs $\mu \to \infty$.

I gränsen snabb rotation, $\omega^2 r >> g$ får vi istället $\varphi \to 0$, dvs störst μ behövs i "sidläget".

Då behöver μ vara $\mu \sim \frac{g}{\omega^2 r}$ dvs väldigt liten.

Svar: μ måste vara minst

$$\boxed{\mu = \frac{g}{\sqrt{\omega^4 r^2 - g^2}}}$$