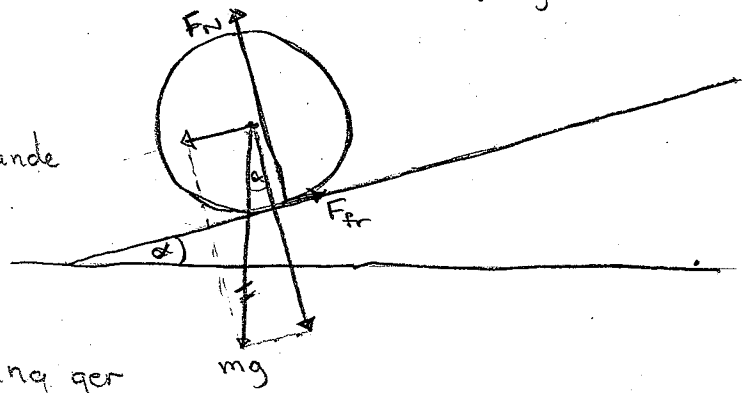
M8 Rullande kroppar – kvantitativ lösning

För en kropp med cirkulärt tvärsnitt som roterar utför ett plan med vinkel α, där kroppens tröghetsmoment är $I = xmr^2$, där m är massan, r radien och x ett dim-löst tal, gäller

$$\begin{cases} mg\cos\alpha = F_N \\ mg\sin\alpha - F_{fr} = ma & \text{(resulterande kraft)} \\ rF_{fr} = I\dfrac{d\omega}{dt} & \text{(momentlagen)} \end{cases}$$



Villkoret rotation utan glidning ger

- $v = \omega r$, derivera:

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Sätt in $\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r}$ i momentlagen:

$$rF_{fr} = \frac{I}{r}a \iff F_{fr} = \frac{I}{r^2}a = \frac{xmr^2}{r^2}a = xma$$

Sätt in $F_{fr} = xma$ i kraft-ekv. utför planet, ger

$$mg\sin\alpha - xma = ma$$
$$g\sin\alpha = (x+1)a$$

dvs

$$\boxed{a = \frac{g\sin\alpha}{1+x}.}$$

Om olika kroppar startar med samma begynnelsehastighet (t ex 0) kommer alltså den kropp med minst x (d v s minst tröghetsmoment givet m och r) att rulla fortast utför planet.

Vi behöver alltså tröghetsmomenten för en sfär (antages homogen), en homogen cylinder och en ihålig cylinder. Antingen slår man upp dem, eller också räknar man ut dem.

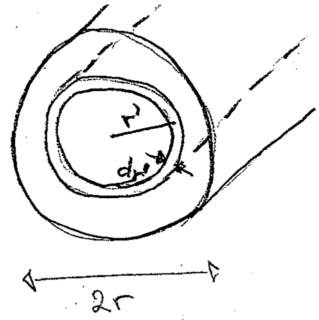
Ihålig cylinder

Enklast. All massa (m) befinner sig på avståndet r från centrum, så

$$I = mr^2, \text{ dvs } x = 1 \text{ i detta fall.}$$

Homogen cylinder

Dela upp cylindern i skal med radie r' och tjocklek dr'. Vi har translationssymmetri i cylinderns längdriktning, och rotationssymmetri i tvärsnittet, så problemet kan behandlas med en endimensionell integral.



Tröghetsmomentsbidrag från ett skal: $dm \cdot r'^2$, där $dm = 2\pi r' dr' \cdot \rho$, där $\rho = \frac{m}{\pi r^2}$ är ytdensiteten.

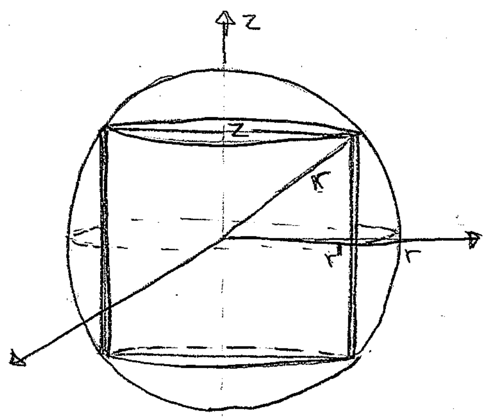
Totalt: $I = \int dm\, r' = \int_0^r 2\pi r' dr' \frac{m}{\pi r^2} r'^2 = \frac{2m}{r^2}\int_0^r r'^3 dr' = \frac{2m}{r^2}\left[\frac{r^4}{4}\right] = \boxed{\frac{1}{2} m r^2}$

d v s $x = \frac{1}{2}$ här.

Homogen sfär

Skär ut tunna cylinderskal // med z-axeln enl figur, med radie r' i xy-planet och tjocklek dr'. Deras höjd blir

$2z = 2\sqrt{r^2 - r'^2}$ enl. Pyth. sats.



Om volymsdensiteten är $\rho = \frac{m}{\frac{4\pi r^3}{3}}$ får vi massan hos ett sådant skal

$dm = V\rho = (2z)(2\pi r')(dr') \cdot \frac{m}{\frac{4\pi r^3}{3}}$

$= \frac{3m}{r^3} r' dr' \sqrt{r^2 - r'^2}.$

Alla punkter i ett skal har samma avstånd till rot. axeln z. Så har skalet valts.

Tröghetsmomentsbidraget från detta skal blir $dI = dm \cdot r'^2$, och totalt

$$I = \int dm\, r'^2 = \frac{3m}{r^3}\int_0^r r'^3 \sqrt{r^2 - r'^2}\, dr' = \left\{ \begin{array}{l} \text{Variabelbyte} \\ r' = r\sin\varphi \Rightarrow \\ r^2 - r'^2 = r^2(1-\sin^2\varphi) \\ \quad = r^2\cos^2\varphi \\ r' = 0 \text{ ger } \varphi = 0 \\ r' = r \text{ ger } \varphi = \frac{\pi}{2} \\ dr' = r\cos\varphi\, d\varphi \end{array} \right\} = \frac{3m}{r^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^3\varphi\; r\cos\varphi\; r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 3mr^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\cos^2\varphi\, d\varphi = 3Mr^2\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\pi/2} = 3mr^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$= \frac{2}{15} 3mr^2 = \boxed{\frac{2}{5} mr^2}$, d v s $x = \frac{2}{5}$ för sfären.

Så eftersom $\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < 1$ får vi

$$x_{\text{sfär}} < x_{\text{hom.cyl}} < x_{\text{ihål.cyl}}$$

d v s sfären rullar fortast.