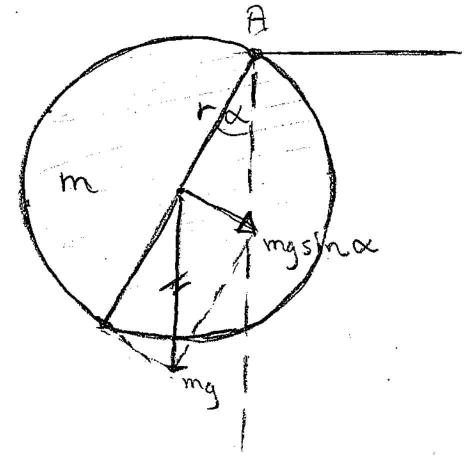
V1 a.) kokosnöten på fix gren



I uppg. M8 visades att

$$I_{cm} = \frac{2}{5} mr^2$$

Parallellaxelteoremet ger tröghetsmomentet kring en axel genom A

$$I_A = I_{cm} + mr^2 = \frac{7}{5} mr^2$$

Momentlagen ger $\frac{dL}{dt} = M$

$$I \frac{d\omega}{dt} = -r(mg \sin\alpha)$$

hävarm r, mg sin α är den andel av mg som är ⊥ hävarmen.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \text{ så } \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$I_A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + rmg \sin\alpha = 0$$

För små svängningar ($\alpha << 1$) gäller $\sin\alpha \approx \alpha$, så

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \boxed{\frac{rmg}{I_A}} \alpha = 0$$

(diff. ekv. för harm. osc.)

Här avläser vi vinkelhastigheten i kvadrat

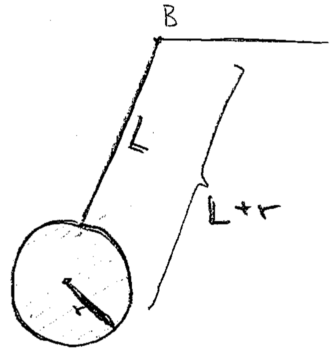
$$\omega^2 = \frac{rmg}{I_A} = \frac{rmg}{\frac{7}{5} mr^2} = \frac{5}{7} \frac{g}{r}$$

och periodtiden blir

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7r}{5g}}$$

---

b.) kokosnöten på lätt stjälk.



Eftersom stjälken inte antas väga ngt får vi enligt //-axelteoremet

$$I_B = I_{cm} + m(L+r)^2 = m\left(\frac{2}{5} r^2 + (L+r)^2\right)$$

$$= m\left(\frac{7}{5} r^2 + 2Lr + L^2\right)$$

Samtidigt blir hävarmens längd L+r istället för r.
I övrigt gäller analysen ovan, så med $\begin{cases} r \to L+r \\ I_A \to I_B \end{cases}$ får vi

$$\omega^2 = \frac{(L+r)mg}{m\left(\frac{7}{5} r^2 + 2Lr + L^2\right)}, \text{ och}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{5} r^2 + 2Lr + L^2}{(L+r)g}}}$$

Periodtiden blir längre än i a.)