

Lösningsförslag

Börja med att ansätta ett potenssamband: $v = (a \cdot h)^b$, där a och b är de sökta konstanterna. Vi logaritmerar båda led och erhåller med hjälp av logaritmeringslagar: $\ln(v) = b \ln(a) + b \ln(h)$. Om vi plottar $\ln(v)$ mot $\ln(h)$ borde vi alltså få en rät linje med lutning b , som skär y -axeln i $b \ln(a)$.

Vi beskriver nu ett lämpligt sätt att göra mätningarna på. Fyll först plastlådan med vatten till djupet h . Mät därefter plastlådans innerlängd l invid vattenytan (alltså avståndet mellan kortsidorna). Plastlådans väggar är inte helt lodräta, så sträckan l kommer att variera något med vattendjupet. Det är dock inte nödvändigt att mäta upp olika längder l för olika vattendjup h eftersom skillnaden mellan längderna är försumbar vid de vattendjup på under ca 5 cm som är relevanta för uppgiften (längden är ca 2% större då $h = 5$ cm än då $h = 0$ cm).

Lyft därefter upp lådans ena kortsida ett par centimeter, så att vattnet samlas vid den andra kortsidan. När du sedan snabbt ställer ned lådan kommer det att bildas en våg, vars vågfront är parallell med lådans kortsida. Denna våg kommer att reflekteras mot lådans kortsidor, och studsas fram och tillbaka ett antal gånger (ca 3 - 5, beroende på vattendjupet) innan den dör ut. Mät tiden det tar för vågen att på detta sätt studsas fram och tillbaka ett bestämt antal gånger, och beräkna sedan tiden t för en passage. Våghastigheten vid det undersökta djupet h blir då $v = l/t$.

När vattendjupet blir större rör sig vågen snabbare, och hinner studsas fler gånger mellan kortsidorna innan den dör ut. Då kan tiden mätas för fler passager än vid mycket små vattendjup. Det är lämpligt att mäta tiden för flera passager för att få bättre noggrannhet i sina mätningar, då tiden för en passage är mycket kort. Ett problem som kan uppkomma, i synnerhet när vattendjupet blir stort (nära ca 5 cm), är att det uppstår flera vågfronter. Det räcker då att betrakta en av dessa vågfronter.

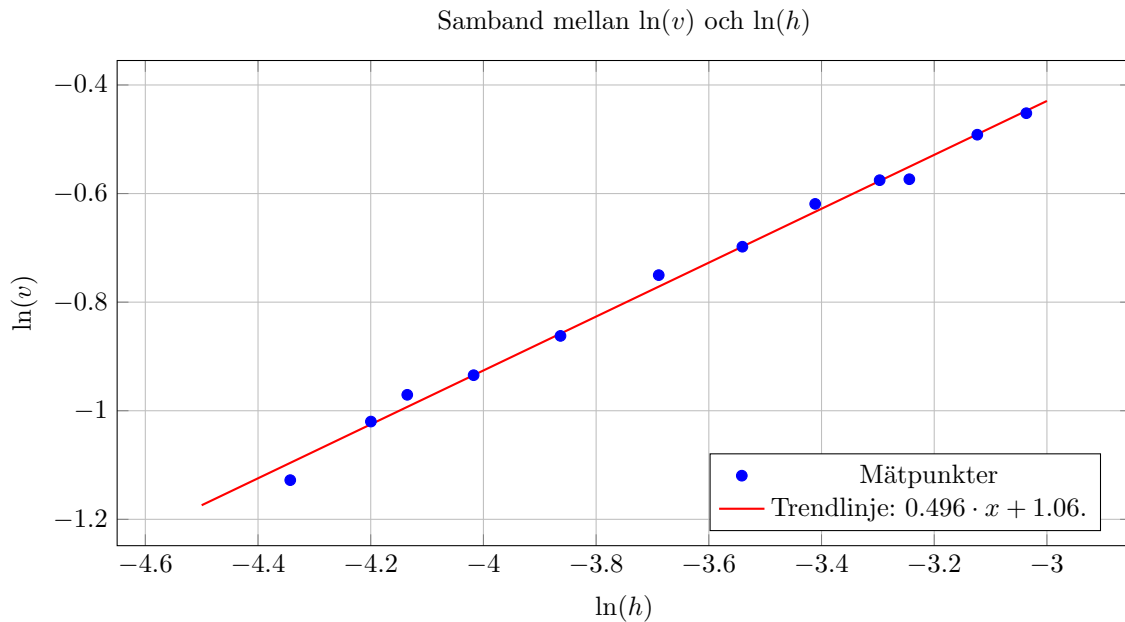
Resultatet från en sådan mätning presenteras i Tabell 1. Innerlängden på lådan nära botten mättes till $l = 0,70$ m. Passagetiden mättes 3 gånger för varje givet djup, och medelvärde presenteras i tabellen. Våghastigheten som sedan kunde beräknas enligt $v = l/t$ syns under *Experimentell hastighet*. Den erhållna hastigheten kan därefter jämföras med den teoretiska hastigheten (se nedan), som presenteras under *Teoretisk hastighet* i tabellen.

Djup (cm)	Tid (s)	Experimentell hastighet (m/s)	Teoretisk hastighet (m/s)
1,3	2,162	0,324	0,357
1,5	1,941	0,361	0,384
1,6	1,848	0,379	0,396
1,8	1,782	0,393	0,420
2,1	1,658	0,422	0,454
2,5	1,482	0,472	0,495
2,9	1,407	0,498	0,534
3,3	1,300	0,538	0,569
3,7	1,244	0,563	0,603
3,9	1,242	0,564	0,619
4,4	1,144	0,612	0,657
4,8	1,100	0,636	0,687

Tabell 1: Mätdata för vattendjup, tid och våghastighet

I Figur 1 plottas $\ln v$ mot $\ln h$. I grafen kan lutningen $b = 0,496$, och skärningen med y -axeln $m = b \ln(a) = 1,06$ läsas av. Därefter kan $a = \exp(m/b) = 8,47$ beräknas.

Enligt teorin ska våghastigheten på grunt vatten bero på vattendjupet enligt $v = \sqrt{g \cdot h}$, där $g \approx 9,82$ m/s² är tyngdaccelerationen. Således är det teoretiska värdet på de sökta konstanterna: $a = g$



Figur 1: Plott av $\ln v$ mot $\ln h$.

och $b = \frac{1}{2}$. För att inse att $a = g$ kan man använda dimensionsanalys och ett storleksordningsargument. Det erhållna värdet på b är mycket nära det teoretiska värdet (det skiljer sig med mindre än 1%). Det erhållna värdet på a skiljer sig från $g \approx 9,82 \text{ m/s}^2$ med ca 14%. Att felet i g blir så stort kan delvis förklaras med att värdet erhålls genom exponentiering: $g = e^{m/b}$, så att små fel i m och b ger upphov till ett stort fel i g .

Vi anmärker att formeln $v = \sqrt{gh}$ endast är giltig då vattendjupet h är mycket mindre än vågens våglängd λ , eller, mer precist, då $h/\lambda \lesssim 0,05$. Tydligen uppfylls detta villkor ganska väl i vår uppgift eftersom formeln väl beskriver sambandet mellan v och h ; punkterna i Figur 1 passar väl till en linje med lutning $\frac{1}{2}$.¹

Kuriosa för den intresserade: Vid större vattendjup blir våghastighetens beroende på djupet mer komplext. Dessutom börjar vågens hastighet bero på våglängden λ . Man får då skilja på två olika hastigheter. Å ena sidan finns vågens *fashastighet*, v_f , som är farten med vilken en ren sinusvåg rör sig². Å andra sidan finns vågens *grupphastighet*, v_g , som definieras som följer: om två sinusvågor med aningen skilda våglängder superponeras kommer det att uppstå ett regelbundet mönster av toppar och dalar. Detta *mönster* kommer att förflyttas när de två ingående vågorna förflyttas, och mönstrets hastighet är grupphastigheten. För grunt vatten (och speciellt i vår laboration) är våghastigheten oberoende av våglängden och fashastigheten är lika med grupphastigheten, $v_f = v_g$. Vi behöver därför inte bry oss om vilka våglängder våra vågor har (så länge $h/\lambda \lesssim 0,05$).

¹Om man jämför den experimentellt uppmätta hastigheten i Tabell 1 med den teoretiska ser man att den teoretiska är systematiskt högre. När samma experiment genomfördes vid ett annat tillfälle var det dock tvärtom: den experimentella hastigheten var högre än den teoretiska. Vi tror därför att diskrepansen beror på hur tidmätningen görs.

²Ett allmänt uttryck för fashastigheten, som gäller vid alla vattendjup h , är: $v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$, där $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Då x är litet kan vi approximativt anta att $\tanh x \approx x$, och då förenklas den komplicerade formeln för v_f till den tidigare formeln $v = \sqrt{gh}$.

Rättningsmall

Mätningar: (Totalt: 4,5 poäng)

- Hittar ett lämpligt sätt att genomföra mätningarna och redovisar detta (se ett möjligt tillvägagångssätt i lösningsförslaget) (1 poäng).
- Tar upp en mätserie av v som funktion av h (1 poäng).
- Inser att tiden för ca 2-5 passager bör mätas för bättre mätsäkerhet (1 poäng).
- Mätningen innehåller minst 10 mätpunkter (varav minst 5 vid olika h) (1 poäng), 5 mätpunkter (0,5 poäng).
- Mätningen spänner över ett stort intervall av h , förslagsvis minst 0 – 4 cm (0,5 poäng).

Teori: (Totalt: 1 poäng)

- Noterar att $\ln v = b \ln a + b \ln h$ vid linjärisering (se lösningsförslaget) eller liknande (1 poäng).

Databehandling: (Totalt: 3,5 poäng)

- Gör en linjäriserad plott (1 poäng), endast icke-linjäriserad plott (0,5 poäng).
- Gör linjeanpassning till linjäriserad plott och bestämmer konstanterna a och b (1,5 poäng), endast en av konstanterna (0,5 poäng).
- Inser att $b = 1/2$ (0,5 poäng).
- Kommer fram till att konstanten a bör representera tyngdaccelerationen $g \approx 9,82 \text{ m/s}^2$, med någon motivering (0,5 poäng).

Noggrannhet: (Totalt: 1 poäng)

- Finner b inom 10% av det teoretiska värdet (0,5), det vill säga $b \in [0.4, 0.6]$ (1 poäng).

Totalt utdelas maximalt 10 poäng på uppgiften. Enhetsfel/utelämnade enheter och storheter ger 0,1 poängs avdrag varje gång det inträffar. Olämplig skala på axlarna i grafen ger upp till 0,5 poängs avdrag.