Månadens problem – MAJ 2013

Lösningsförslag

1. Man kan resonera på olika sätt, och göra olika uppskattningar, när man löser Fermi-problem. Här visas exempel på hur man kan resonera.

   (a) Antag att varje svensk konsumerar 2 liter mejeriprodukter per vecka, det vill säga 10^2 liter per år. Det bor ungefär 10^7 personer i Sverige. Om det produceras lika mycket som det konsumeras innebär detta att att den årliga mjölkproduktionen är $10^2 \cdot 10^7$ liter $= 10^9$ liter.

   (På www.svenskmjolk.se/Statistik/ kan man läsa att det under år 2012 vägdes in 2 860 000 ton mjölk i Sverige. Uppskattningen gav alltså rätt storleksordning.)

   (b) Antag att en bil rullar 1 000 mil per år (i snitt 3 mil per dag). Typisk bensinförbrukning är 1 liter per mil. I vaje bil tankas alltså 10^3 liter bensin per år. Antalet bilar uppskattas till 10^6. Det bör alltså tankas $10^3 \cdot 10^6$ liter $= 10^9$ liter bensin per år i svenska bilar.

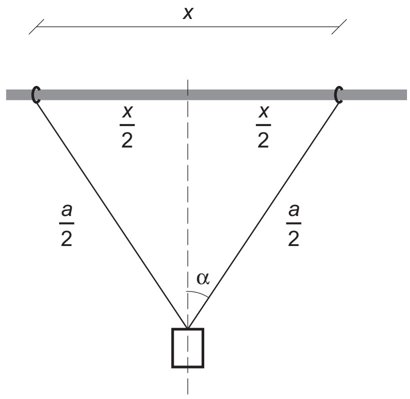
   (Enligt http://spbi.se/statistik/volymer/volymer-drivmedel/ utlevererades under 2012 nästan 4 miljoner m^3 bensin. Uppskattningen gav alltså rätt storleksordning.)

   (c) Vi approximerar jorden med en kub med sidan 1 000 mil = 10^7 m (jordens omkrets är ungefär 4 000 mil). Kubens begränsningsarea är $6 \cdot 10^7 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^2 \approx 10^{15}\ \mathrm{m}^2$. Antag att hela jorden är täckt med vatten med djupet 1 km $= 10^3$ m. Totala vattenvolymen är då $10^{15} \cdot 10^3\ \mathrm{m}^3 = 10^{18}\ \mathrm{m}^3$. Om vi antar att vattendroppen har formen av en kub blir kantlängden $(10^{18})^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{m} = 10^6$ m, vilket är ungefär en tiondel av jordkubens kantlängd. Vattendroppen bör alltså ha en diameter som är ungefär en tiondel av jordens diameter.

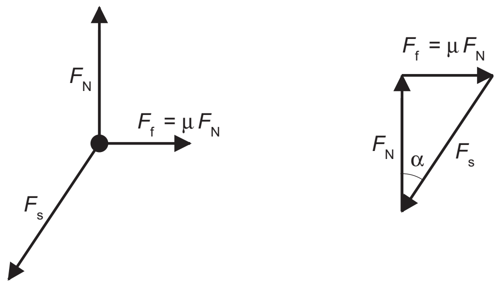
   (På en hemsida från U.S. Geological Survey (http://ga.water.usgs.gov/edu/earthhowmuch.html) finns en bild som visar allt vatten på jorden som en droppe ovanför USA, med en diameter som är lite mer än en tiondel av jorddiametern. Det framgår inte hur de har räknat, men vi utgår från att de har gjort ordentlig uppskattning. Återigen gav vår uppskattning rätt storleksordning.)

   Notera att ju fler antaganden som behöver göras, desto bättre brukar uppskattningen bli. När man gör många antaganden minskar risken att samtliga antaganden alla är över- eller underskattningar.

2. Låt avståndet mellan ringarna när de är på största möjliga avstånd från varandra vara x.



Betrakta den högra ringen. Tre krafter verkar på den: en uppåtriktad kraft från staven, en friktionskraft från staven och en kraft från snöret. När ringarna är så långt från varandra som möjligt är friktionen fullt utvecklad, det vill säga $F_\mathrm{f} = \mu F_\mathrm{N}$.



Eftersom ringen är i jämvikt måste de tre krafterna bilda en triangel enligt figuren ovan till höger. Pythagoras sats i denna krafttriangel ger

$$F_\mathrm{s}^2 = (\mu F_\mathrm{N})^2 + F_\mathrm{N}^2 \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{s} = \sqrt{1+\mu^2}\, F_\mathrm{N}.$$

Likformiga trianglar ger nu

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\mu F_\mathrm{N}}{F_\mathrm{s}} = \frac{\mu F_\mathrm{N}}{\sqrt{1+\mu^2}\, F_\mathrm{N}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mu a}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$