Månadens problem – SEPTEMBER 2013

Lösningsförslag

1. (a) Om vi antar likformigt accelererad rörelse så ges läget efter 16 s av

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t = \frac{0 + \frac{61}{3{,}6}}{2} \cdot 16 \text{ m} = 0{,}14 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

(b) Personens acceleration (antas vara konstant) är

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{61}{3{,}6}}{16} \text{ m/s}^2 = 1{,}06 \text{ m/s}^2.$$

På personen verkar två krafter, tyngdkraften $F_\text{g} = mg$ och en uppåtriktad kraft F_N från vågen. Resultanten till dessa krafter har storleken

$$R = F_\text{N} - mg = F_\text{N} - 65 \cdot 9{,}82 \text{ N} = F_\text{N} - 638{,}3 \text{ N}.$$

Newtons andra lag ($R = ma$) ger

$$F_\text{N} - 638{,}3 \text{ N} = 65 \text{ kg} \cdot 1{,}06 \text{ m/s}^2 \quad \Leftrightarrow \quad F_\text{N} = 707{,}1 \text{ N}.$$

En badrumsvåg visar $\frac{\text{kraften på vågen}}{g}$, så vågen kommer att visa

$$\frac{707{,}1 \text{ N}}{9{,}82 \text{ N/kg}} = 72 \text{ kg}.$$

(c) Vi räknar på vad som händer under en sekund. Då åker 520 kg upp 0,80 m och 420 kg åker ned 0,80 m. Systemets lägesenergi ökar med

$$(520 - 420) \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}80 \text{ J} = 785{,}6 \text{ J}.$$

Eftersom verkningsgraden är 70 % måste motorn tillföra energimängden

$$\frac{785{,}6 \text{ J}}{0{,}70} = 1\,122 \text{ J},$$

vilket innebär att effekten behöver vara

$$P = \frac{1\,122 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 1{,}1 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

(d) Vi räknar åter på vad som händer under en sekund. Nu ska 520 kg lyftas upp 0,80 m. Systemets lägesenergi ökar då med

$$520 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}80\ \mathrm{J} = 4\,085\ \mathrm{J}.$$

Eftersom verkningsgraden är 70 % måste motorn tillföra energimängden

$$\frac{4\,085\ \mathrm{J}}{0{,}70} = 5\,836\ \mathrm{J},$$

vilket innebär att effekten behöver vara

$$P = \frac{5\,836\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{s}} = 5{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{W}.$$

Svar: (a) 0,14 km (b) 72 kg (c) 1,1 kW (d) 5,8 kW.

2. Tyngdkraften på lådan kan komposantuppdelas i en komposant F_1 parallellt med planet och en komposant F_2 vinkelrätt mot planet. Låt F_f vara friktionskraften på lådan.

När lådan dras uppför planet gäller då att

$$51\ \mathrm{N} = F_\mathrm{f} + F_1. \tag{1}$$

När lådan dras nedför rampen gäller att

$$12\ \mathrm{N} + F_1 = F_\mathrm{f} \quad \Leftrightarrow \quad 12\ \mathrm{N} = F_\mathrm{f} - F_1. \tag{2}$$

Ledvis addition av ekvation (1) och (2) ger

$$63\ \mathrm{N} = 2F_\mathrm{f} \quad \Leftrightarrow \quad F_\mathrm{f} = 31{,}5\ \mathrm{N}.$$

Insättning i (1) ger

$$F_1 = 51\ \mathrm{N} - F_\mathrm{f} = (51 - 31{,}5)\ \mathrm{N} = 19{,}5\ \mathrm{N}.$$

Tyngdkraftens komposant vinkelrätt mot planet kan nu bestämmas med hjälp av Pythagoras sats,

$$F_1^2 + F_2^2 = (mg)^2 \quad \Rightarrow \quad F_2 = \sqrt{(6{,}4 \cdot 9{,}82)^2 - 19{,}5^2}\ \mathrm{N} = 59{,}75\ \mathrm{N}.$$

Normalkraften på lådan, F_N, är lika stor. Friktionstalet kan då beräknas som

$$\mu = \frac{F_\mathrm{f}}{F_\mathrm{N}} = \frac{31{,}5}{59{,}75} = 0{,}527.$$

Betrakta nu fallet då lutningen är sådan att lådan glider med konstant fart. Låt planets lutningsvinkel vara α. Då göller att $F_1 = mg\sin\alpha$ och $F_2 = mg\cos\alpha$. Eftersom $F_\mathrm{f} = \mu F_\mathrm{N} = \mu mg\cos\alpha$, och $F_1 = F_\mathrm{f}$ vid jämvikt, fås

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha = \mu.$$

Eftersom $\mu = 0{,}527$ enligt beräkningarna ovan fås till slut den sökta vinkeln

$$\alpha = \arctan\mu = \arctan 0{,}527 = 27{,}8^\circ.$$

Svar: 28°