Månadens problem – OKTOBER 2013

Lösningsförslag

1. (a) Från bilderna kan en ballongs diameter uppskattas till 3 m. Ballongernas totala volym är då

$$V = 370 \cdot \frac{4\pi\, 1{,}5^3}{3}\ \mathrm{m}^3 = 5{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^3.$$

Lyftkraften fås med hjälp av Arkimedes princip,

$$F_\mathrm{L} = \rho_\mathrm{luft} V g = 1{,}29 \cdot 5{,}2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}82\ \mathrm{N} = 66 \cdot 10^3\ \mathrm{N}.$$

Gasen i ballongerna har tyngden

$$F_\mathrm{gas} = \rho_\mathrm{He} V g = 0{,}178 \cdot 5{,}2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}82\ \mathrm{N} = 9 \cdot 10^3\ \mathrm{N}.$$

Ballongerna bör således kunna lyfta

$$\frac{(66-9)\cdot 10^3}{9{,}82}\ \mathrm{kg} = 5{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$$

Vi har här bortsett från massan hos ballonghöljena.

(b) Lyftkraften blir densamma, men gasen i ballongerna har nu tyngden

$$\begin{aligned} F_\mathrm{gas} &= \rho_\mathrm{He}\frac{V}{2}g + \rho_\mathrm{luft}\frac{V}{2}g \\ &= \left(0{,}178 \cdot \frac{5{,}2\cdot 10^3}{2} \cdot 9{,}82 + 1{,}29 \cdot \frac{5{,}2 \cdot 10^3}{2} \cdot 9{,}82\right)\ \mathrm{N} = 38 \cdot 10^3\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Ballongerna bör kunna lyfta

$$\frac{(66-38)\cdot 10^3}{9{,}82}\ \mathrm{kg} = 2{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$$

Svar: (a) 5,8 ton (b) 2,9 ton.

2. (a) Kasttiden ges av

$$t = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_0 \cos\alpha},$$

där L är horisontella avståndet till väggen och α är utkastvinkeln. Läget i y-led kan nu skrivas (positiv riktning uppåt)

$$y = v_{0y}t + \frac{at^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{L}{v_0\cos\alpha} + \frac{a}{2} \cdot \frac{L^2}{v_0^2\cos^2\alpha},$$

det vill säga

$$y(\alpha) = L\tan\alpha + \frac{aL^2}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Detta uttryck kan ritas med hjälp av grafritande räknare (med $L = 3{,}0$ m, $v_0 = 12$ m/s och $a = -9{,}82$ m/s^2). Alternativt går vi vidare med derivering:

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= \frac{L}{\cos^2\alpha} + \frac{aL^2}{2v_0^2} \cdot \frac{(-2)}{\cos^3\alpha}(-\sin\alpha) \\ &= \frac{L}{\cos^2\alpha} + \frac{aL^2}{v_0^2} \cdot \frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{v_0^2 L + aL^2\tan\alpha}{v_0^2\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

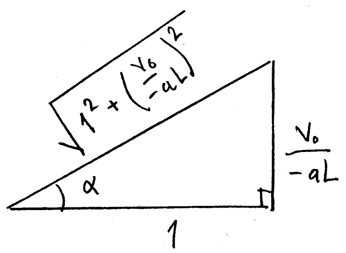
Sätter vi nu $y'(\alpha) = 0$ fås ekvationen $v_0^2 L + L^2\tan\alpha = 0$, det vill säga

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{-aL}. \tag{2}$$

Insättning av $L = 3{,}0$ m, $v_0 = 12$ m/s och $a = -9{,}82$ m/s^2 ger $\alpha = 78°$. Insättning i uttrycket (1) ger att bollen träffar väggen 7,0 m ovanför utkastnivån.

(b) Om $\tan\alpha = \frac{v_0^2}{-aL}$ så är (se figuren nedan)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{-aL}\right)^2}}. \tag{3}$$



Insättning av (2) och (3) i (1) ger nu (sätt $a = -g$)

$$\begin{aligned} y(L) &= L\frac{v_0^2}{gL} - \frac{gL^2}{2v_0^2}\left(1 + \left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gL^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gL^2}{2v_0^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gL^2}{v_0^2}\right). \end{aligned}$$

Svar: (a) $78°$, 7,0 m (b) $y(L) = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{gL^2}{v_0^2}\right)$.