Månadens problem – APRIL 2014

Lösningsförslag

1. (a) Under fallet omvandlas lägesenergi till rörelseenergi och friktionsvärmeenergi. Energiprincipen ger

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + F_\mathrm{f}h,$$

där m är Baumgartners massa, v är hastigheten när han fallit sträckan h och F_f är medelvärdet av luftmotståndskraften. Ur detta fås

$$F_\mathrm{f} = mg - \frac{mv^2}{2h} = \left(120 \cdot 9{,}8 - \frac{120 \cdot 373^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^3}\right) \text{ N} = 0{,}25 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

(b) Vid konstant hastighet är luftmotståndskraften lika stor som tyngdkraften, det vill säga

$$mg = k\rho A v^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{mg}{kAv^2} = \frac{120 \cdot 9{,}8}{0{,}5 \cdot 1 \cdot 373^2} \text{ kg/m}^3 = 0{,}017 \text{ kg/m}^3$$

(c) Vi uppskattar hur långt Baumgartner har fallit när hans fart är 300 m/s respektive 315 m/s. Samma energiresonemang som i uppgift (a) ger

$$h = \frac{mv^2}{2(mg - F_\mathrm{f})}.$$

Insättning av $F_\mathrm{f} = 0{,}25 \cdot 10^3$ N, $v = 300$ m/s ger

$$h = \frac{120 \cdot 300^2}{2(120 \cdot 9{,}8 - 0{,}25 \cdot 10^3)} \text{ m} = 5{,}8 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

Insättning av $F_\mathrm{f} = 0{,}25 \cdot 10^3$ N, $v = 315$ m/s ger

$$h = \frac{120 \cdot 315^2}{2(120 \cdot 9{,}8 - 0{,}25 \cdot 10^3)} \text{ m} = 6{,}4 \cdot 10^3 \text{ m}.$$

Baumgartner bör alltså ha uppnått farten 300 m/s på höjden $(39 - 5{,}8)$ km $= 33{,}2$ km och farten 315 m/s på höjden $(39 - 6{,}6)$ km $= 32{,}6$ km. Eftersom ljudhastigheten minskar från 315 m/s på höjden 39 km till 300 m/s på höjden 30 km, bör han ha brutit ljudvallen på ungefär 33 km höjd.

Svar: (a) 0,25 kN (b) 0,02 kg/m^3 (c) På höjden 33 km.

2. (a) Tiden det tar för hinken att nå marken fås ur

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}0}{2{,}0}}\ \text{s} = 2{,}0\ \text{s}.$$

För att bestämma bollens utgångshastighet inför vi en lägeskoordinataxel (s) med positiv riktning uppåt och origo där bollen kastas iväg. Då vet vi att $s = -1{,}0$ m då $t = 2{,}0$ s. Dessutom gäller att $a = -9{,}82$ m/s^2. Utgångshastigheten fås då ur

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{s}{t} - \frac{at}{2} = \left(\frac{-1{,}0}{2{,}0} - \frac{(-9{,}82) \cdot 2{,}0}{2} \right)\ \text{m/s} = 9{,}3\ \text{m/s}.$$

(b) Vi fortsätter med samma lägeskoordinataxel som i senare delen av (a)-uppgiften. Hinkens läge kan då skrivas

$$s_\mathrm{H} = h + \frac{a_\mathrm{H} t^2}{2}.$$

där $h = 3{,}0$ m och $a_\mathrm{H} = -2{,}0$ m/s^2. Bollens läge kan skrivas

$$s_\mathrm{B} = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

där $a = -9{,}82$ m/s^2. Tiden då bollen och hinken möts fås genom att sätta $s_\mathrm{H} = s_\mathrm{B}$, det vill säga

$$v_0 t + \frac{at^2}{2} = h + \frac{a_\mathrm{H} t^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + \frac{2v_0}{a - a_\mathrm{H}} t - \frac{2h}{a - a_\mathrm{H}} = 0$$

Insättning av värden ger andragradsekvationen (enheter ej utskrivna)

$$t^2 - 2{,}384t + 0{,}767 = 0,$$

Numerisk lösning ger $t_1 = 0{,}383$ s och $t_2 = 2{,}00$ s. Bollens läge när den möter hinken är

$$s_\mathrm{B} = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \left(9{,}3 \cdot 0{,}383 + \frac{(-9{,}82) \cdot 0{,}383^2}{2} \right)\ \text{m} = 2{,}8\ \text{m}$$

Bollen och hinken möts alltså $(2{,}8 + 1{,}0)$ m $= 3{,}8$ m ovanför marken.

Svar: (a) 9,3 m/s (b) 3,8 m ovanför marken.