# Månadens problem – MAJ 2014

# Lösningsförslag

1. Vi vet att $P = 360$ W då $v = 12$ m/s på plan mark. Detta ger konstanten $k$ enligt

$$360 \text{ W} = k \cdot (12 \text{ m/s})^3 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}208 \text{ kg/m}.$$

Korrekt enhet fås ur

$$\left[\frac{\mathrm{Ws}^3}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Js}^2}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right].$$

Låt nu farten i uppförsbacken vara $v$. På tiden $\Delta t$ kommer då cyklisten $h = v\,\Delta t\,\sin\left(\arctan\frac{1}{50}\right)$ högre upp. Effekten som cyklisten måste utveckla för att höja tyngdpunkten är

$$P_{mg} = \frac{mgh}{\Delta t} = mg\,v\,\sin\left(\arctan\frac{1}{50}\right).$$

Om vi antar att cyklisten fortfarande utvecklar effekten 360 W får vi ekvationen

$$360 \text{ W} = kv^3 + mg\,v\,\sin\left(\arctan\frac{1}{50}\right).$$

Massan för cyklist med cykel antas vara 80 kg. Insättning av värden ger nu ekvationen (enheter ej utskrivna)

$$360 = 0{,}208v^3 + 15{,}709v.$$

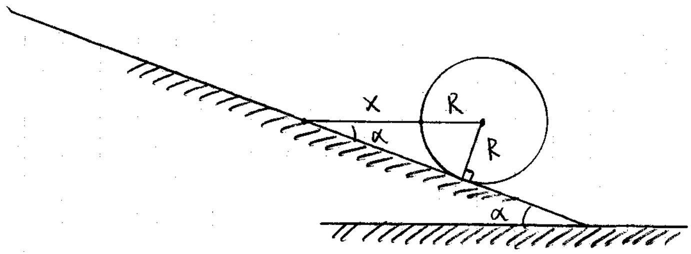
Numerisk lösning med hjälp av räknare ger $v = 9{,}9$ m/s. Farten minskar alltså med

$$\frac{12 - 9{,}9}{12} = 0{,}18 = 18\%.$$

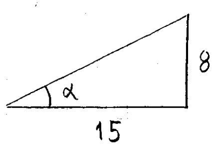
**Svar:** Med ungefär 20 % om cyklisten utvecklar lika stor effekt.

2. Låt snörets längd vara $x$. Ur figuren nedan ser vi att

$$\sin\alpha = \frac{R}{x+R} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{R}{\sin\alpha} - R = R\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right).$$



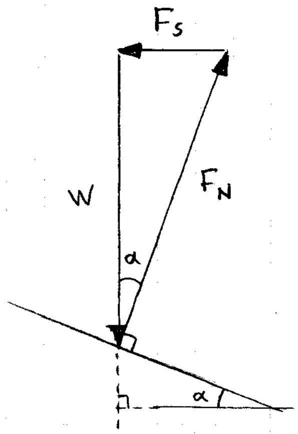

Eftersom $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ kan vi rita triangeln nedan.




Hypotenusan i denna triangel har längden $\sqrt{8^2+15^2} = 17$, vilket ger att $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. Insättning i uttrycket ovan ger

$$x = R\left(\frac{17}{8} - 1\right) = \frac{9R}{8}.$$

Tre krafter verkar på klotet: vertikal tyngdkraft, $W$, horisontell kraft från snöret, $F_s$, och en kraft från underlaget, $F_N$, som är vinkelrät mot underlaget (eftersom underlaget är friktionsfritt). Klotet är i jämvikt vilket innebär att vi kan rita en krafttriangel som i figuren nedan (att den nedre vinkeln i krafttriangeln är $\alpha$ kan inses med lite geometri, se figuren).




Ur figuren fås

$$\tan\alpha = \frac{F_s}{W} \quad \Leftrightarrow \quad F_s = W\tan\alpha = \frac{8W}{15}.$$

**Svar:** $\frac{9R}{8}, \frac{8W}{15}$.