Månadens problem – SEPTEMBER 2014

1. På Wikipedia (http://sv.wikipedia.org/wiki/Hydrometer) kan man läsa:

> **Hydrometer** eller *areometer* är ett instrument för att mäta vätskors densitet.
> En enkel hydrometer är oftast tillverkad av glas och är en sluten, rörformad behållare. Denna är indelad i två funktionellt olika delar. Nederst utgörs hydrometern av en något lite uppsvälld del, vilken till sin större del utgör flytkropp. (...) Flytkroppen avslutas uppåt med ett smalt rör, i vilket en skala ligger innesluten, eller på vilket en skala är inristad alternativt fastsatt. När hydrometern sänks ner i en vätska, sjunker den ner i densamma och flyter på grund av sin konstruktion i upprätt ställning. Beroende på vätskans densitet (...), sjunker hydrometern ner till ett visst djup, och ett värde kan läsas av på skalan där vätskeytan möter glasrörets övre, skalförsedda del.

Hydrometern används bland annat till att bestämma alkoholhalten i en vätska, till exempel vid vintillverkning. Ju större alkoholhalt, desto lägre densitet. Den kan också användas för att se om bonden spätt ut mjölken med vatten. (Mjölks densitet är aningen högre än den för vatten men temperatur och fetthalt påverkar också.)

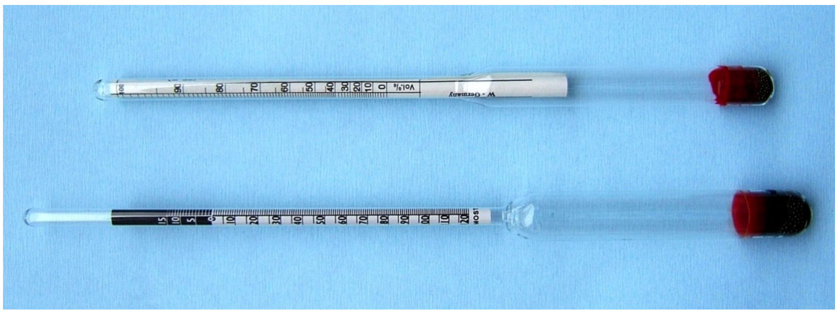

Bild från http://sv.wikipedia.org/wiki/Hydrometer

Vår hydrometer väger 18 g. Den jämntjocka övre delen av röret har en genomskärningsyta på 0,75 cm^2.

(a) Hur stort är avståndet mellan de skalstreck som svarar mot 1,00 och 0,70 g/cm^3?

(b) I vatten sjunker hydrometern till delstrecket 68 och i en vätska med densiteten 0,80 g/cm^3 till delstrecket 96. Beräkna densiteten hos en vätska i vilken hydrometern sjunker till delstrecket 75.

(c) I en vätska med densiteten x g/cm^3 sjunker vår hydrometer till ett delstreck som befinner sig y cm ovanför det delstreck som anger densiteten 1,00 g/cm^3. Ange det matematiska sambandet mellan y och x.

2. En rät cirkulär öppen kon med vertikal axel vänder öppningen uppåt. Dess toppvinkel 2α är mindre än 90°. Konen är lagrad så, att den kan sättas i rotation kring sin axel. Medan anordningen är i vila, placerar man en liten kropp, som får behandlas som punktformig, på konens insida. Friktionskoefficienten μ antas vara så stor, att kroppen ligger kvar. Därpå bringar man försiktigt konen att rotera med omloppstiden T sekunder. Huruvida kroppen då kommer i glidning eller inte, beror av dess avstånd r från axeln.

   Visa att det det största värde på r, för vilket kroppen ligger kvar, ges av

$$r = \frac{gT^2}{4\pi^2} \left(\cot(\alpha - \beta) \right),$$

   där $\tan \beta = \mu$ och g är tyngdaccelerationen.

   Ledning: Cotangens-funktionen definieras

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}.$$