Månadens problem – SEPTEMBER 2014

Lösningsförslag

1. När hydrometern flyter i en vätska är tyngdkraften på hydrometern lika stor som lyftkraften, dvs

$$mg = \rho g V, \tag{1}$$

där m är hydrometerns massa, g är tyngdaccelerationen, ρ är vätskans densitet och V är volymen av hydrometern som är under ytan.

(a) Vi kan nu bestämma volymen under ytan för de två densiteterna på vätskan.

$$V = \frac{mg}{\rho g} = \frac{m}{\rho} \tag{2}$$

Vi får $18{,}0\ \mathrm{cm}^3$ för $1{,}00\ \mathrm{g/cm}^3$ och $25{,}7\ \mathrm{cm}^3$ för $0{,}70\ \mathrm{g/cm}^3$. Med en skillnad på $7{,}7\ \mathrm{cm}^3$ kan vi med hjälp av hydrometerns tvärsnittsarea A beräkna avståndet d mellan skalstrecken till

$$d = \frac{V}{A} = \frac{7{,}7\ \mathrm{cm}^3}{0{,}75\ \mathrm{cm}^2} = 10\ \mathrm{cm}. \tag{3}$$

Svar: Det är 10 cm mellan de två skalstrecken.

(b) Vi börjar med att bestämma hur stor volym av hydrometern som varje skalstreck motsvarar. Sedan tidigare vet vi att $18{,}0\ \mathrm{cm}^3$ av hydrometern kommer att vara under ytan i vatten (som har densiteten $1{,}00\ \mathrm{g/cm}^3$), och på samma sätt får vi fram att $22{,}5\ \mathrm{cm}^3$ av den är under ytan i en vätska med densiteten $0{,}80\ \mathrm{g/cm}^3$. Det ger oss att varje skalstreck motsvarar

$$\frac{22{,}5 - 18{,}0}{96 - 68}\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}16\ \mathrm{cm}^3. \tag{4}$$

Skalstreck 75 motsvarar därför att

$$18{,}0\ \mathrm{cm}^3 + (75 - 68) \cdot 0{,}16\ \mathrm{cm}^3 = 19{,}1\ \mathrm{cm}^3 \tag{5}$$

av hydrometern är under ytan. Vi kan nu beräkna vätskans densitet till

$$\rho = \frac{18\ \text{g}}{19{,}1\ \text{cm}^3} = 0{,}94\ \text{g/cm}^3. \tag{6}$$

Svar: Vätskan har densiteten 0,94 g/cm^3.

(c) Lösningsmetoden är en generalisering av metoden i (a) ovan. Volymen under ytan i en vätska med densiteten x g/cm^3 kan skrivas som

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m}{x} = \frac{18\ \text{g}}{x}. \tag{7}$$

Skillnad i volymen jämfört med om hydrometern ligger i vatten ges av

$$\Delta V = \frac{18\ \text{g}}{x} - 18{,}0\ \text{cm}^3. \tag{8}$$

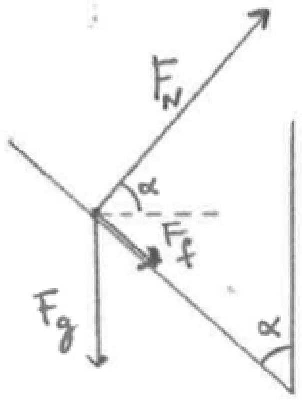
Vi kan ni lätt bestämma avståndet y med hjälp av tvärsnittsarean. Det matematiska sambandet (utan enheter) blir:

$$y = \frac{\Delta V}{A} = \frac{\frac{18}{x} - 18{,}0}{0{,}75} = \frac{24}{x} - 24 \tag{9}$$

Svar: $y = \frac{24}{x} - 24$

Problemen är variationer på problem i Fysikaliska problem, Almén och Nilsson, Svenska Bokförlaget, Stockholm, 1959.

2. Vi börjar med att ställa upp de samband vi har på grund av jämvikt.



Med $F_g = mg$ kan vi skriva

$$\text{Horisontellt: } F_N \cos\alpha + F_f \sin\alpha = ma \tag{1}$$
$$\text{Vertikalt: } F_N \sin\alpha - F_f \cos\alpha = mg \tag{2}$$
$$\text{Fullt utbildad friktion: } F_f = \mu F_N \tag{3}$$
$$\text{Centripetalacceleration: } a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{4}$$

De horisontella komposanterna av krafterna ser till att vi har en centripetalkraft, och de vertikala komposanterna är i jämvikt. Dividera (2) med (1) ledvis och sätt in (3).

$$\frac{F_N \sin\alpha - \mu F_N \cos\alpha}{F_N \cos\alpha + \mu F_N \sin\alpha} = \frac{mg}{ma} \tag{5}$$
$$\frac{\sin\alpha - \mu \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} = \frac{g}{a} \tag{6}$$

Om man gör omskrivningen $\mu = \tan\beta$, delar både täljare och nämnare i vänstra ledet med $\cos\alpha$ och använder ett par trigonometriska samband får man

$$\frac{\sin\alpha - \tan\beta \cos\alpha}{\cos\alpha + \tan\beta \sin\alpha} = \frac{g}{a} \tag{7}$$
$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\beta \tan\alpha} = \frac{g}{a} \tag{8}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{g}{a} \tag{9}$$
$$a = g\cot(\alpha - \beta) \tag{10}$$

Sista steget är nu att sätta in (4).

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = g\cot(\alpha - \beta) \tag{11}$$
$$r = \frac{gT^2}{4\pi^2}\cot(\alpha - \beta) \tag{12}$$

Vilket skulle visas.

Problemet är en variation på ett problem i Uppgifter i fysik, B. Wahlström, Svenska Bokförlaget, Stockholm, 1950.