Månadens problem – NOVEMBER 2014

Lösningsförslag

1. Med lågt tryck i röret så är tryckskillnaden lika med trycket utanför röret, dvs normalt lufttryck. När förseglingen bryts och luften rusar in blir kraften på bollen

$$F = p \cdot A = p \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 101{,}325 \text{ kPa} \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}040 \text{ m})^2}{4} = 127 \text{ N} \tag{1}$$

Kraften får bollen att accelerera genom röret, och arbetet som görs på bollen ger bollen rörelseenergi.

$$E_k = W = F \cdot s = 127 \text{ N} \cdot 1{,}8 \text{ m} = 229 \text{ J} \tag{2}$$

När bollen bryter förseglingen i andra änden av röret borde den ha farten

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 229 \text{ J}}{0{,}0027 \text{ kg}}} = 410 \text{ m/s}. \tag{3}$$

Detta är betydligt mer än de 170 m/s som mättes upp av Mythbusters. En anledning till att farten blir mindre i praktiken är att luft tränger förbi bollen så att tryckskillnaden minskar snabbt. Detta syns tydligt i programmet. En annan anledning är att bollen bromsas upp av friktion i röret, den kolliderar med väggarna, och bromsas när den träffar förseglingen i andra änden.

Svar: Farten blir 410 m/s.

2. (a) För likformigt accelererad rörelse i vertikal led (y-led) gäller

$$y = \frac{gt^2}{2}. \tag{1}$$

Med positiv riktning nedåt kan falltiden beräknas med

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}0 \text{ m}}{9{,}82 \text{ m/s}^2}} = 1{,}36 \text{ s}. \tag{2}$$

Utgångsfarten i horisontell led (x-led) ska därför vara

$$v = \frac{x}{t} = \frac{3{,}5 \text{ m}}{1{,}36 \text{ s}} = 2{,}6 \text{ s}. \tag{3}$$

Svar: Utgångsfarten ska vara 2,6 m/s.

(b) Rörelseekvationerna för ett snett kast ser generellt ut så här:

$$v_x = v_0 \cos(\alpha) \tag{4}$$

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - gt \tag{5}$$

$$x = v_0 \cos(\alpha) \cdot t \tag{6}$$

$$y = y_0 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{7}$$

Vi vet att vi börjar på 9,0 m höjd och landar 3,5 m från tornet. Vi bryter ut t från (6) och sätter in i (7).

$$t = \frac{3{,}5}{v_0 \cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad 0 = 9{,}0 + \frac{v_0 \sin(\alpha) \cdot 3{,}5}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{g}{2}\left(\frac{3{,}5}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 \tag{8}$$

Vi utelämnar enheterna för tydlighet. Vi kan nu bryta ut v_0 och få v_0 som en funktion av α.

$$v_0 = \sqrt{\frac{49g}{4(18+7\tan(\alpha))\cos^2(\alpha)}} = \frac{7\sqrt{g}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{18+7\tan(\alpha)}} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)} \tag{9}$$

Vi vill nu minimera v_0 med avseende på α. Enklast är att hitta funktionens minimum med hjälp av en miniräknare eller dator. Svaret blir att utgångsfarten ska vara 2,5 m/s vid 11 graders vinkel.

Det går att hitta lösningen algebraiskt. Vi deriverar och sätter derivatan lika med noll.

$$\frac{dv_0}{d\alpha} = \frac{7\sqrt{g}}{2} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{18+7\tan(\alpha)} \cdot \cos^2(\alpha)} - \frac{7}{2(18+7\tan(\alpha))^{3/2}\cos^3(\alpha)}\right) = 0 \tag{10}$$

Vi skriver på gemensamt bråkstreck och tar hjälp av trigonometriska ettan för att få en något enklare ekvation.

$$\frac{7\sqrt{g}}{2} \cdot \frac{7\tan^2(\alpha) + 36\tan(\alpha) - 7}{2(18+7\tan(\alpha))^{3/2} \cdot \cos(\alpha)} = 0 \tag{11}$$

Lösningen till ekvationen får vi genom att sätta täljaren till noll.

$$7\tan^2(\alpha) + 36\tan(\alpha) - 7 = 0 \tag{12}$$

Låt $z = \tan(\alpha)$ och lös ekvationen.

$$z = -\frac{18}{7} \pm \frac{\sqrt{373}}{7} \tag{13}$$

Eftersom $z = \tan(\alpha)$ är en periodisk funktion finns oändligt många lösningar för α men det är bara den första positiva lösningen som är intressant för oss.

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{18}{7} + \frac{\sqrt{373}}{7}\right) = 0{,}18545 \text{ radianer} \approx 11^\circ \tag{14}$$

Om vi sätter in detta värde i ekvation (9) får vi att utgångshastigheten ska vara $v_0 = 2{,}5$ m/s.

Svar: Utgångshastigheten ska vara 2,5 m/s vid 11 graders vinkel.