Månadens problem – FEBRUARI 2015

Lösningsförslag

1. Vid elastiska kollisioner bevaras både rörelsemängden

$$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}} \tag{1}$$

$$Mv_1 + mv_2 = Mv_3 + mv_4 \tag{2}$$

och rörelseenergin.

$$E_{\text{k,före}} = E_{\text{k,efter}} \tag{3}$$

$$\frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{Mv_3^2}{2} + \frac{mv_4^2}{2} \tag{4}$$

Här låter vi M representera den stora massan och m den lilla massan. Vi bryter ut v_3 ur ekvation (3).

$$v_3 = \frac{Mv_1 + mv_2 - mv_4}{M} \tag{5}$$

Stoppar vi in detta i ekvation (5) får vi följande uttryck.

$$Mv_1^2 + mv_2^2 = M\left(\frac{Mv_1 + mv_2 - mv_4}{M}\right)^2 + mv_4^2 \tag{6}$$

Efter en hel del räknande kan man visa att

$$v_4^2 - 2\left(\frac{Mv_1 + mv_2}{M+m}\right)v_4 + \frac{(m-M)\,v_2^2 + 2Mv_1v_2}{M+m} = 0. \tag{7}$$

Vid fritt fall från 1,0 m höjd beräknas hastigheten precis före kollision med hjälp av

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 4{,}4 \text{ m/s}. \tag{8}$$

Denna hastighet betecknar vi v_0 i fortsättningen. När den stora bollen (massa m, hastighet $v_2 = v_0$) träffar marken (massa M, hastighet $v_1 = 0$ m/s) kan vi beräkna bollens nya hastighet v_4.

$$v_4^2 + 2\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)v_4 + \frac{(m-M)\,v_0^2}{M+m} = 0 \tag{9}$$

Eftersom jordens massa är mycket större än bollens massa ($m/M \approx 0, M+m \approx M$) kan vi förenkla till

$$v_4^2 - v_0^2 = 0, \tag{10}$$

med lösningen $v_4 = \pm v_0$. Den intressanta lösningen är $v_4 = -v_0$, dvs bollen vänder och studsar upp med samma fart, vilket är precis vad vi förväntar oss.

(a) När den stora bollen (massa $M = 0{,}100$ kg, hastighet $v_1 = -v_0 = -4{,}4$ m/s) träffar den lilla bollen (massa $m = 0{,}050$ kg, hastighet $v_2 = v_0 = 4{,}4$ m/s) så kan vi beräkna den lilla bollens nya hastighet ur ekvation (7). (Vi utelämnar enheterna av utrymmesskäl.)

$$v_4^2 - 2\left(\frac{0{,}100\cdot(-4{,}4)+0{,}050\cdot 4{,}4}{0{,}100+0{,}050}\right)v_4 + \frac{(0{,}050-0{,}100)\cdot 4{,}4^2 + 2\cdot 0{,}100\cdot(-4{,}4)\cdot 4{,}4}{0{,}100+0{,}050} = 0 \tag{11}$$

Vi förenklar,

$$v_4^2 + 2{,}95v_4 - 32{,}7 = 0 \tag{12}$$

och får svaret $v_4 = -7{,}4$ m/s (den andra lösningen $v_4 = 4{,}4$ m/s är inte intressant).

Svar: Den lilla bollen får farten 7,4 m/s.

(b) Vi kan räkna på samma sätt som i (a) och få svaret 13 m/s. Men vi kan också göra vissa förenklingar i ekvation (7) först, eftersom den stora bollen har så mycket mer massa än den lilla bollen. Det kommer vi att ha nytta av i resten av deluppgifterna. Anta att $m/M \approx 0$ och att $M+m \approx M$. Då kan vi förenkla ekvation (7) och får följande uttryck.

$$v_4^2 - 2v_1v_4 - v_2^2 + 2v_1v_2 = 0. \tag{13}$$

Den stora bollen har hastigheten $v_1 = -v_0$ och den lilla bollen har hastigheten $v_2 = v_0$ före kollisionen.

$$v_4^2 + 2v_0v_4 - 3v_0^2 = 0 \tag{14}$$

Den intressanta lösningen blir $v_4 = -3v_0 = -13$ m/s.

Ett tredje sätt att få detta svar är genom att använda ett resonemang där vi byter referenssystem. Om vi byter till den stora bollens referenssystem precis efter dess kollision med marken så kommer vi att se den lilla bollen komma mot oss med farten $2v_0$. Eftersom den stora bollen är så mycket större än den lilla bollen kommer den lilla bollen att studsa mot den stora bollen utan att påverka den. Den lilla bollen kommer att avlägsna sig från den stora bollen med farten $2v_0$ efter kollisionen. Går vi tillbaka till vårt ursprungliga referenssystem så ser vi att den lilla bollen rör sig med farten $v_0 + 2v_0 = 3v_0$, eftersom den stora bollen har farten v_0.

Svar: Den lilla bollen får farten 13 m/s.

(c) Vi kan nu använda resonemanget med referenssystem ovan till att snabbt komma fram till svaret vi är ute efter: Den näst största bollen kommer att ha hastigheten $-3v_0$ när den kolliderar med den tredje största bollen som då har hastigheten v_0. Hastighetsskillnaden Δv är $-4v_0$ och den tredje största bollen får hastigheten $-3v_0 + (-4v_0) = -7v_0$ efter kollisionen. Den tredje största bollen kommer att kollidera med den minsta bollen på samma sätt och med samma resonemang får vi att den minsta bollen får hastigheten $-15v_0 = 66$ m/s.

Svar: Den fjärde och minsta bollen får farten 66 m/s.

(d) Vi kan fortsätta vårt resonemang och göra en tabell över hastigheterna. Den mindre bollens hastighetsändring anges som Δv.

Kollision	Större boll	Mindre boll	Δv	v_4
1	$-v_0$	v_0	$-2v_0$	$-3v_0$
2	$-3v_0$	v_0	$-4v_0$	$-7v_0$
3	$-7v_0$	v_0	$-8v_0$	$-15v_0$
4	$-15v_0$	v_0	$-16v_0$	$-31v_0$
		...		
n	$\left(-2^n+1\right)v_0$	v_0	$-2^n v_0$	$\left(-2^{n+1}+1\right)v_0$

Jordens flykthastighet motsvarar $-2528v_0$. Vi löser en sista ekvation för att få vårt svar.

$$-2^{n+1}+1=-2825 \quad \Rightarrow \quad n+1=11{,}3 \tag{15}$$

Den minsta bollen har nummer $n+1$. Vi behöver mer än 11 bollar, dvs minst 12 bollar.

Svar: Man behöver 12 bollar för att den minsta ska komma upp i jordens flykthastighet.

2. En variant av det här problemet var med bland kvaluppgifterna för Wallenbergs Fysikpris 2006.

   (a) Resultanten av friktionskraften F_f och normalkraften F_N ska gå genom motorcykelns och förarens gemensamma tyngdpunkt för att undvika vridmoment.

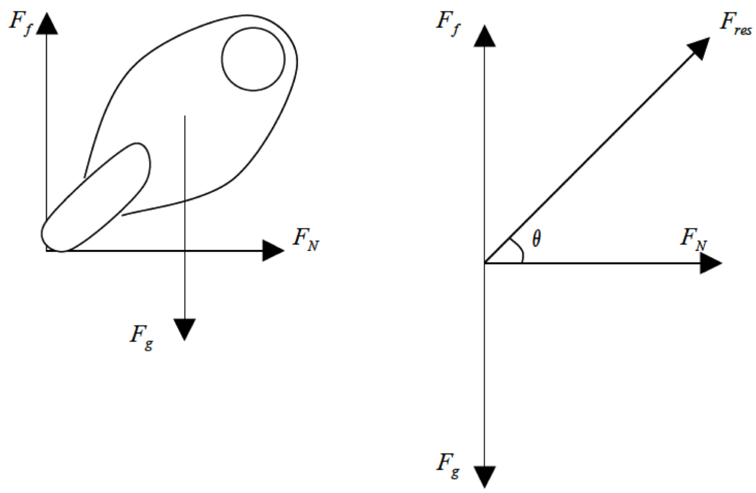

Bild från lösningen 2006
(http://www.fysikersamfundet.se/fysiktavlingen/arkiv/Kvalificering/losn/11.losn%202006.pdf).

   (b) Det är normalkraften som utgör centripetalkraften som ser till att motorcykeln rör sig i cirkelbana.

$$F_C = F_N \tag{1}$$

Friktionskraften är proportionell mot normalkraften.

$$F_f = \mu F_N = \mu F_C \tag{2}$$

Friktionskraften måste minst vara lika stor som tyngdkraften så den minsta hastigheten som är möjlig för att komma runt ges av

$$mg = \mu F_C = \mu \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{gR}{\mu}}, \tag{3}$$

där μ är friktionstalet mellan motorcykeln och väggen, och R är cylinderns radie. Sätter vi in värdena får vi $v = 7{,}7$ m/s.

Svar: Den minsta hastigheten är 7,7 m/s.

   (c) Om väggen lutar utåt med 5° blir sambanden istället

$$F_C = F_N \cos 5^\circ - F_f \sin 5^\circ, \tag{4}$$

$$mg = F_N \sin 5^\circ + F_f \cos 5^\circ. \tag{5}$$

Vi sätter in $F_f = \mu F_N$ och bryter ut F_N ur ekvation (4).

$$F_N = \frac{F_C}{\cos 5^\circ - \mu \sin 5^\circ} \tag{6}$$

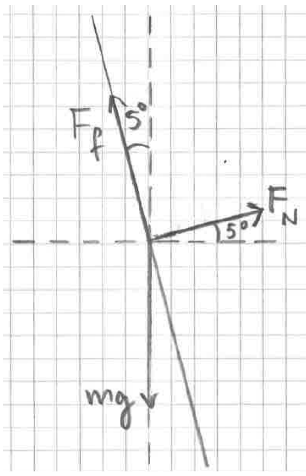

Diagram över krafterna. Ej skalenlig.

Ekvation (5) kan nu skrivas som

$$mg = F_C \cdot \frac{\sin 5^\circ + \mu \cos 5^\circ}{\cos 5^\circ - \mu \sin 5^\circ}. \tag{7}$$

Minsta möjliga hastighet blir

$$mg = \frac{mv^2}{R} \cdot \frac{\sin 5^\circ + \mu \cos 5^\circ}{\cos 5^\circ - \mu \sin 5^\circ} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR \cdot \frac{\cos 5^\circ - \mu \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ + \mu \cos 5^\circ}}. \tag{8}$$

Med insatta värden blir $v = 7{,}0$ m/s.

Svar: Vid 5° lutning blir minsta hastigheten 7,0 m/s.