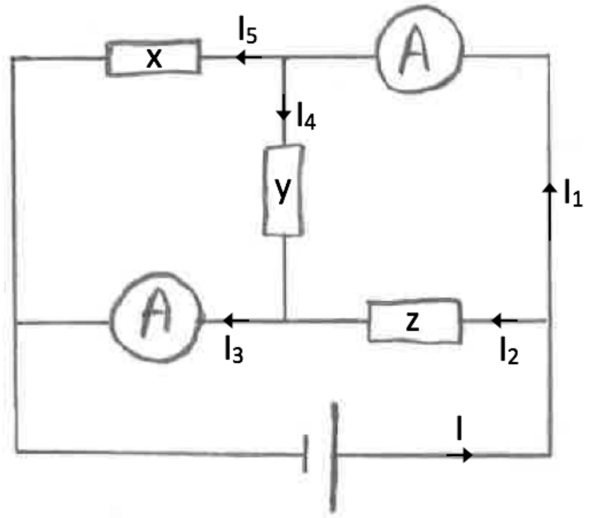
Månadens problem – MAJ 2017

Lösningsförslag



1. Vi utgår från följande samband för strömmen genom batteriet, se beteckningarna i figuren.

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + I_3 - I_4 \tag{1}$$

Låt resistansen i motstånd x betecknas med R_x, osv. Genom att göra en potentialvandring runt y-z-slingan kan vi skriva följande samband.

$$R_z \cdot I_2 - R_y \cdot I_4 = 0 \tag{2}$$

Med hjälp av sambandet

$$I_3 = I_2 + I_4 \tag{3}$$

får vi att

$$R_y \cdot I_4 = R_z \cdot (I_3 - I_4) \tag{4}$$

Om vi antar att $R_y = R_z$ så får vi att

$$I_4 = \frac{I_3}{2} \tag{5}$$

och, från ekvation (1),

$$I = I_1 + \frac{I_3}{2}. \tag{6}$$

Vi får nu två olika värden på I, beroende på värdena på I_1 och I_3.

I_1	I_3	I
40 mA	60 mA	70 mA
60 mA	40 mA	80 mA

Om man istället räknar på x-y-slingan, och antar att $R_x = R_y$, så får man att

$$I = \frac{I_1}{2} + I_3 \tag{7}$$

vilket ger oss samma möjliga värden på strömmen genom batteriet, 70 mA eller 80 mA.

Svar: Strömmen genom batteriet är 70 mA eller 80 mA.

Kommentarer: a) Man kan lätt visa att strömmen I_4 har riktningen som visas i figuren genom att göra en potentialvandring som går genom batteriet, amperemetrarna och motstånd y. b) Det är omöjligt att få två olika värden på amperemetrarna om $R_x = R_z$, så det fallet behöver vi inte räkna på .

2. På grund av effektsymmetrin som beskrivs i uppgiften måste de vertikalt ritade motstånden ha samma resistans. Detsamma gäller för de horisontellt ritade motstånden. Anta att de vertikalt ritade motstånden har resistansen R_1 och att de horisontellt ritade motstånden har resistansen R_2. Effekt kan beräknas med

$$P = \frac{U^2}{R}. \tag{8}$$

I första fallet, då vi kopplar in batteriet vid A och D, får vi följande uttryck för effekten.

$$P = U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 2R_2} \right) = U^2 \frac{2(R_1 + R_2)}{R_1 (R_1 + 2R_2)} \tag{9}$$

I det andra fallet, då vi kopplar in batteriet vid A och B, får vi

$$2P = U^2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + 2R_1} \right) = U^2 \frac{2(R_1 + R_2)}{R_2 (R_2 + 2R_1)}. \tag{10}$$

Genom att dividera med 2 i ekvation 10 kan vi sätta ekvationerna 9 och 10 lika med varandra och få fram följande samband.

$$R_1\left(R_1+2R_2\right)=2R_2\left(R_2+2R_1\right) \tag{11}$$

Skriver vi om detta får vi en andragradsekvation

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2-2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)-2=0 \tag{12}$$

med lösningen

$$\frac{R_1}{R_2}=1\pm\sqrt{3} \tag{13}$$

Vi kan direkt kassera den ena lösningen eftersom den gör att den ena resistansen blir negativ. Vi har därför att

$$R_1=R_2\left(1+\sqrt{3}\right) \tag{14}$$

Kopplar vi in batteriet vid A och C blir effekten

$$P_{AC}=U^2\frac{2}{R_1+R_2}=U^2\frac{2}{R_2\left(2+\sqrt{3}\right)}. \tag{15}$$

Genom att förlänga med lämpliga faktorer kan vi skriva om med P.

$$P_{AC}=U^2\frac{2}{R_2\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2}\right)\left(\frac{R_2+2R_1}{R_2+2R_1}\right)=\frac{2P}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\frac{R_2+2R_1}{\left(R_1+R_2\right)} \tag{16}$$

Fortsätter vi att använda ekvation 14 kan vi skriva om och förenkla.

$$P_{AC}=P\cdot\frac{6+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=P\cdot\left(4\sqrt{3}-6\right)\approx 0{,}928P \tag{17}$$

Svar: Kretsen drar effekten $\left(4\sqrt{3}-6\right)P\approx 0{,}928P$.