Månadens problem – MARS 2019

Lösningsförslag

1. Från formelsamlingen får vi att jordens medelsavstånd från solen är 1,000 AU och att Jupiters medelavstånd från solen är 5,205 AU. Då borde det minsta avståndet jorden-Jupiter vara

$$r_1 = (5{,}205 - 1{,}000)\ \text{AU} = 4{,}205\ \text{AU} = 4{,}205 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m} = 6{,}291 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

Största möjliga gravitationskraft på marmeladburken från Jupiter är således

$$F_1 = G\frac{M_\text{J} m_\text{marmalad}}{r_1^2} \left(= 6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}899 \cdot 10^{27} \cdot 0{,}67}{(6{,}291 \cdot 10^{11})^2}\ \text{N} = 2{,}14 \cdot 10^{-7}\ \text{N} \right).$$

Gravitationskraften på marmeladburken från dig är

$$F_2 = G\frac{m m_\text{marmelad}}{r_2^2},$$

om du har massan m och befinner dig på avståndet r_2 från marmeladburken. Sökta avståndet får vi om vi sätter $F_2 = F_1$, vilket ger

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{m}{M_\text{J}}} = 6{,}291 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\frac{60}{1{,}899 \cdot 10^{27}}}\ \text{m} = 0,1\ \text{m}.$$

Svar: Ungefär en decimeter.

2. (a) Newtons andra lag på ett föremål med massan m i Lagrangepunkten L_1 ger följande ekvation:

$$G\frac{M_\text{S} m}{(R-r)^2} - G\frac{M_\text{J} m}{r^2} = \frac{mv^2}{R-r} \tag{1}$$

Hastigheten kan uttryckas som

$$v = \frac{2\pi(R-r)}{T}. \tag{2}$$

Kombination av ekvation (1) och ekvation (2) och division med m ger

$$G\left(\frac{M_S}{(R-r)^2} - \frac{M_\text{J}}{r^2}\right) = \frac{4\pi^2(R-r)}{T^2}$$

Ekvationen kan genom division med G, division med M_S och multiplikation med $(R-r)^2$ skrivas om till

$$1 - \frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{S}} \frac{(R-r)^2}{r^2} - \frac{4\pi^2}{GT^2} \frac{(R-r)^3}{M_\mathrm{S}} = 0, \tag{3}$$

vilket skulle visas.

(b) För att lösa ekvation (3) gör vi ett par omskrivningar:

$$1 - \frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{S}} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 - \frac{4\pi^2}{GT^2} \frac{R^3}{M_\mathrm{S}} \frac{(R-r)^3}{R^3} = 0$$

$$1 - \frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{S}} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 - \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2 M_\mathrm{S}} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 = 0$$

Om vi nu sätter $\dfrac{r}{R} = x$ kan ekvationen skrivas

$$1 - \frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{S}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2 M_\mathrm{S}} (1-x)^3 = 0$$

Insättning av värden ($M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $M_\mathrm{J} = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s och $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 ger ekvationen

$$1 - 3{,}001809 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1{,}000846(1 - x^3) = 0.$$

Grafisk lösning med räknare ger $x = 0{,}01006$, vilket innebär att $r = 0{,}01006R = 1{,}5 \cdot 10^9$ m.

Svar: (b) $1{,}5 \cdot 10^9$ m.