# Månadens problem – OKTOBER 2019

# Lösningsförslag

1. (a) Låt $h$ vara höjdskillnaden i backen. På nedvägen kan som mest energimängden $Mgh$, där $M$ är den fullastade dumperns massa (110 ton), utvinnas och lagras för uppfärden. Energimängden som åtgår för att dumpern sedan ska ta sig upp för backen är $mgh$, där $m$ är den tomma dumpens massa ($(100-65)$ ton = 45 ton). Vi får då en undre gräns för verkningsgraden:

$$\eta_{\text{min}} = \frac{W_{\text{nyttig, min}}}{W_{\text{tillförd, max}}} = \frac{mgh}{Mgh} = \frac{45}{110} = 0{,}41.$$

(b) För att inte farten ska öka måste den bromsande kraften vara minst lika stor som tyngdkraftens komposant längs med backen, det vill säga

$$Mg\sin 13^\circ = 110\cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot \sin 13^\circ \text{ N} = 2{,}4\cdot 10^5 \text{ N}.$$

(c) Accelerationen ges av Newtons andra lag:

$$a = \frac{Mg\sin 13^\circ}{M} = g\sin 13^\circ = 9{,}82\cdot\sin 13^\circ \text{ m/s}^2 = 2{,}2 \text{ m/s}^2.$$

Sökta tiden fås ur

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad\Leftrightarrow\quad \Delta t = \frac{v-0}{a} = \frac{\frac{100}{3{,}6}-0}{2{,}2} \text{ s} = 13 \text{ s}.$$

(d) Utifrån bilden uppskattar vi ett däcks diameter till 2 meter. Då kan det vara rimligt att ett däck är ungefär 0,5 meter brett, och att kontaktytans area är $A = 0{,}5\times 0{,}3 \text{ m}^2$. Om vi antar att tyngden är jämnt fördelad över sex likadana hjul blir sökta trycket

$$p = \frac{Mg}{4A} = \frac{110\cdot 10^3\cdot 9{,}82}{6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3} \text{ Pa} = 1\cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

**Svar:** (a) Minst 0,36. (b) 0,24 MN (c) 13 sekunder (d) 1 MPa

2. (a) Newtons andra lag i kombination med Newtons allmänna gravitationslag ger normalkraften vid ekvatorn:

$$G\frac{M_{\mathrm{J}}m}{R_{\mathrm{ekvator}}^2} - N_{\mathrm{ekvator}} = \frac{mv^2}{R_{\mathrm{ekvator}}} \quad \Leftrightarrow \quad N_{\mathrm{ekvator}} = G\frac{M_{\mathrm{J}}m}{R_{\mathrm{ekvator}}^2} - \frac{mv^2}{R_{\mathrm{ekvator}}}$$

där $m$ är brottarens massa och $M_{\mathrm{J}}$ är jordens massa. För hastigheten gäller att

$$v = \frac{2\pi R_{\mathrm{ekvator}}}{T},$$

vilket insatt ovan ger normalkraften

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{ekvator}} &= m\left(\frac{GM_{\mathrm{J}}}{R_{\mathrm{ekvator}}^2} - \frac{4\pi^2 R_{\mathrm{ekvator}}}{T^2}\right) \\ &= 100\left(\frac{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}9736\cdot 10^{24}}{(6378\cdot 10^3)^2} - \frac{4\pi^2\cdot 6378\cdot 10^3}{86164^2}\right)\text{ N} \\ &= 976{,}5\text{ N.} \end{aligned}$$

Newtons allmänna gravitationslag ger normalkraften vid nordpolen:

$$N_{\mathrm{pol}} = G\frac{M_{\mathrm{J}}m}{R_{\mathrm{pol}}^2} = 6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}9736\cdot 10^{24}\cdot 100}{(6356\cdot 10^3)^2}\text{ N} = 986{,}7\text{ N.}$$

Alltså visar vågen

$$100\cdot\frac{986{,}7}{976{,}5}\text{ kg} = 101\text{ kg.}$$

(b) För att normalkraften ska bli noll, gäller att

$$N_{\mathrm{ekvator}} = G\frac{M_{\mathrm{J}}m}{R_{\mathrm{ekvator}}^2} - \frac{mv^2}{R_{\mathrm{ekvator}}} = 0,$$

vilket ger

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{R_{\mathrm{ekvator}}^3}{GM_{\mathrm{J}}}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{(6378\cdot 10^3)^3}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}9736\cdot 10^{24}}}\text{ s} = 5069\text{ s} = 84\text{ min.} \end{aligned}$$

**Svar:** (a) 101 kg (b) 84 min