Månadens problem – MARS 2020

Lösningsförslag

1. (a) Alla trådarna ligger över nätspänningen, $U = 230$ V. Resistansen för en tråd i parallellkopplingen (utvecklar $P/4$):

$$R = \frac{4U^2}{P} = \frac{4 \cdot 230^2}{1\,500}\ \Omega = 141\ \Omega.$$

Varje tråd bör då ha längden

$$l = \frac{RA}{\rho} = \frac{141 \cdot \pi \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}5 \cdot 10^{-6}}\ \text{m} = 1\,276\ \text{m},$$

så totalt behövs det $4 \cdot 1{,}276$ km $= 5{,}1$ km tråd.

(b) Strömmen från nätet är $I = \frac{P}{U} = \frac{1500}{230}$ A $= 6{,}52$ A, så strömmen genom varje tråd i parallellkopplingen är $\frac{6{,}52}{4}$ A $= 1{,}6$ A.

(c) Om vi uppskattar att 25 % av den tillförda effekten (det vill säga $0{,}25 \cdot 1\,500$ W $=$ 375 W) går till uppvärmning av stenen och luften i ugnen, och låter den sökta uppvärmningstiden vara x sekunder får vi

$$\begin{aligned}
(c_{\text{sten}} m_{\text{sten}} + c_{\text{luft}} m_{\text{luft}})\Delta T &= (375\ \text{W}) \cdot (x\ \text{s}) \\
x &= \frac{(800 \cdot 50 + 1\,010 \cdot 0{,}110 \cdot 1{,}293) \cdot (1200 - 20)}{375} \\
x &= 126\,319
\end{aligned}$$

Det tar alltså ungefär 35 h att värma ugnen.

Svar: (a) Totalt 5,1 km. (b) 1,6 A (c) Uppskattningsvis 35 h.

Vi kan teckna en differentialekvation enligt

$$P = k(T - T_0) + (c_{\text{sten}} m_{\text{sten}} + c_{\text{luft}} m_{\text{luft}}) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t},$$

med $P = 1\,500$ W, $T_0 = 20\,^\circ$C och $k = \frac{1500}{1280}$ W/K. Insättning av värden ger

$$\begin{aligned}
1\,500 &= \frac{1\,500}{1\,280} \cdot T - \frac{1\,500}{1\,280} \cdot 20 + (800 \cdot 50 + 1\,010 \cdot 0{,}110 \cdot 1{,}293) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \\
1\,500 &= 1{,}1719 \cdot T - 23{,}438 + 40\,143{,}65 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &+ \frac{1{,}1719}{40\,143{,}65} T = 0{,}03795
\end{aligned}$$

Lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ är

$$T = -1\,280\,e^{-\frac{1,1719}{40143,65}t} + 1\,300$$

Ritar vi grafen till den här funktionen ser vi att $T = 1\,200$ då $t = 87\,332$, vilket är 24 h. Enligt den här modellen tar det alltså 24 h att nå 1 200 °C.

2. Vi antar att luftmotståndskraften är försumbar i början, då accelerationen är 5,5 m/s^2. Newtons andra lag längs med det lutande planet ger då

$$mg\sin\alpha - F_\mathrm{f} = ma_1 \quad \Leftrightarrow \quad F_f = mg\sin\alpha - ma_1,$$

där α är planets lutningsvinkel. Vidare är normalkraftens lika stor som tyngdkraftens komposant vinkelrätt mot underlaget, det vill säga

$$F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha.$$

Friktionskoefficienten får vi då som

$$\mu = \frac{F_\mathrm{f}}{F_\mathrm{N}} = \frac{mg\sin\alpha - ma_1}{mg\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a_1}{g\cos\alpha}$$
$$= \tan 62^\circ - \frac{5,5}{9,82\cdot\cos 62^\circ} = 0,69.$$

Vi antar sedan att friktionskraften är konstant, $F_f = mg\sin\alpha - ma = (0,026\cdot 9,82\cdot \sin 62^\circ - 0,026\cdot 5,5)\ \mathrm{N} = 0,0824\ \mathrm{N}$.

Newtons andra lag på kuben i slutet av rörelsen (när farten är ungefär 3,7 m/s, enligt avläsning i diagrammet) ger

$$mg\sin\alpha - F_\mathrm{f} - F_\mathrm{luft} = ma_2,$$

varur vi får luftmotståndskraften

$$\begin{aligned} F_\mathrm{luft} &= mg\sin\alpha - F_\mathrm{f} - ma_2 \\ &= (0,026\cdot 9,82\cdot\sin 62^\circ - 0,0824 - 0,026\cdot 3,56)\ \mathrm{N} \\ &= 0,0505\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Luftmotståndskoefficienten kan nu bestämmas:

$$F_\mathrm{luft} = \frac{CA\rho v^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{2F_\mathrm{luft}}{A\rho v^2} = \frac{2\cdot 0,0505}{1,0\cdot 10^{-2}\cdot 1,293\cdot 3,7^2} = 0,57.$$

Svar: Luftmotståndskoefficienten 0,57, friktionskoefficienten 0,69.