Månadens problem – MAJ 2020

Lösningsförslag

1. (a) Vi kan anta att stenen är i kraftbalans, så att $mg = F_{\mathrm{fr}}$, vilket ger

$$0.5C\rho\pi r^2 v^2 = mg,$$

varur vi får

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho\pi r^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30\cdot 9{,}82}{0{,}5\cdot 1{,}2\cdot\pi\cdot 0{,}13}}\ \mathrm{m/s} = 140\ \mathrm{m/s}.$$

(b) Den största tänkbara temperaturen får stenen om hela friktionskraftens arbete leder till värmeenergi i stenen, så att

$$cm\Delta T = mgs \quad\Leftrightarrow\quad \Delta T = \frac{gs}{c} = \frac{9{,}82\cdot 10^4}{0{,}5\cdot 10^3}\ \mathrm{K} = 200\ \mathrm{K}.$$

Stenen värms i så fall till maximalt 400 K, vilket är högt, men inte ger någon smältning eller förångning.

2. (a) Arbetet som gravitationskraften uträttar ges av arean under F-s-grafen, eller integralen

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm}{x^2}dx = \left[-\frac{GMm}{x}\right]_R^\infty = \frac{GMm}{R}$$
$$= \frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 30}{6{,}37\cdot 10^6}\ \mathrm{J} = 1{,}87\cdot 10^9\ \mathrm{J}.$$

(b) Detta arbete leder till ökad rörelseenergi, $W = E_{\mathrm{k}}$, så att

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}87\cdot 10^9}{30}}\ \mathrm{m/s} = 11\ \mathrm{km/s}.$$

Detta är det som i andra sammanhang kallas för flykthastigheten, alltså den hastighet som krävs för att en projektil skall lämna en himlakropp (om man bortser från luftmotstånd). En verklig meteorit kommer att ha ännu mycket större hastighet eftersom den kommer in mot jorden med en stor hastighet. Vanliga hastigheter innan meteoriterna bromsas in i atmosfären är 20–70 km/s.

(c) Den rörelseenergi som meteoriten har när den kommer in i atmosfären är mycket större än rörelseenergin vid marken, så meteoriten skall alltså avge rörelseenergin

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} = W = 1.9 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Denna energi skall i så fall jämföras med den energi som krävs för att värma, smälta och förånga stenen,

$$cm\Delta T + (l_\mathrm{s} + l_\mathrm{v})m = (0{,}5 \cdot 30 \cdot 1500 + 30 \cdot 250 + 30 \cdot 3000) \text{ kJ} = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ J},$$

vilket är mindre än 10 % av rörelseenergin. Det är alltså rimligt att nästan hela stenen förångas på vägen in mot marken på grund av inbromsningen i atmosfären.